Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2023-2024

Mathématiques III PMI 9 octobre 2023. Durée : 1 h 30

Devoir n° 2

Partie analyse

Exercice 1. Étudier la convergence de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

   Solution

   On utilise un développement limité d'ordre 2 en zéro de la fonction $t \mapsto ln(1+t)$ et on vérifie que

   $$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ est alternée et convergente puisque $a_n := |u_n| = 1/n$ est décroissante et tend vers zéro. Par ailleurs, d'après le théorème sur les séries de Riemann,

   $$-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

   est le terme général d'une série absolument convergente. Il s'ensuit que la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est convergente.

2. $u_n = \left(\tan(\frac{1}{n})\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

   Solution

   On définie la suite géométrique $a_n = q^n$ avec $q = \tan(\frac{1}{2}) < 1$ (car $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4} \approx 0.8$) et on remarque que pour tout $n \geq 2$ on a $u_n \leq a_n$. Puisque u_n est une suite à termes positifs et que la série géométrique de raison $q < 1$ converge, alors la série $\sum_n u_n$ converge.

Exercice 2. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique tendant vers 0 et a, b, c trois réels vérifiant $a + b + c = 0$, on pose pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}$$

Montrer que la série de terme général u_n converge et calculer sa somme.

Solution

Grâce à la relation $a + b + c = 0$, on peut réécrire u_n en utilisant juste les paramètres a et c.

$$u_n = av_n - cv_{n+1} - av_{n+1} + cv_{n+2} = (av_n - cv_{n+1}) - (av_{n+1} - cv_{n+2})$$

Si on définie $z_n := av_n - cv_{n+1}$, on voit que on peut réécrire $u_n = z_n - z_{n+1}$ comme le terme générale d'une série téléscopique. Puisque la suite v_n converge vers 0 par hypothèse, on a que z_n converge aussi vers 0 et donc la série $\sum_n u_n$ converge avec somme donnée par

$$\sum_n u_n = z_0 - \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 = av_0 - cv_1$$

Exercice 3. On considère la suite numérique (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{a}{k}\right), \quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \pi\mathbb{N}$$

1. On suppose que $a \neq 1$. Préciser si la série $\sum u_n$ converge ou pas.

Solution

On remarque que la suite n'est pas forcément positive ; elle est quand même de signe constant à partir d'un certain rang et donc, pour étudier la série correspondante à la suite u_n, on peut utiliser les critères pour les séries à termes positifs. On essaie d'utiliser le critère de d'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! \prod_{k=1}^{n+1} \sin\left(\frac{a}{k}\right)}{n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{a}{k}\right)} = (n+1) \sin\left(\frac{a}{n+1}\right) \sim (n+1)\frac{a}{n+1} = a$$

D'après la règle de D'Alembert si $a < 1$ alors la série converge et si $a > 1$ la série diverge.

2. On pose pour tout $n \geq 1$, $a_n = \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Montrer que la série $\sum a_n$ converge.

Solution

On fait un développement limité à l'ordre 2 de a_n pour $n \to \infty$.

$$a_n = \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On voit que a_n est la somme de deux termes ($-\frac{1}{6n^2}$ et $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$) qui sont les termes généraux de séries absolument convergentes par le critère de Riemann. La série $\sum a_n$ est donc convergente.

3. Utiliser le point 2 pour étudier la convergence de la suite (u_n) pour $a = 1$.

Solution

Pour $a = 1$ on a

$$u_n = n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

et donc

$$\ln(u_n) = \ln(n! \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{a}{k}\right)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k \sin\left(\frac{1}{k}\right)) = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

La série de terme général a_n converge, donc la suite u_n converge.

Partie algèbre

Exercice 4. 1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La matrice de $f - \lambda \operatorname{Id}$, dans la base canonique, est

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

On fait d'abord l'opération par colonne $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2$ sur $M(\lambda)$. Après, sur la matrice qu'on obtiens, on fait l'opération $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$. On déduit que

$$\det(M(\lambda)) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Grâce à un développement par rapport à la première colonne et à la formule du déterminant pour les matrices de taille 2, on déduit que

$$\det(M(\lambda)) = (1-\lambda)^2(3-\lambda).$$

Donc, $f - \lambda \operatorname{Id}$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda \in \{1, 3\}$.

2. Pour trouver une base de $\ker(f - \operatorname{Id})$ et $\ker(f - 3\operatorname{Id})$, on va échelonner $M(1)$ et $M(3)$ en faisant des opérations par lignes, car ce type d'opérations ne changent pas le noyaux.

$$M(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En appliquant les opérations $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$ à $M(1)$, on trouve la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est échelonné, on en déduit qu'une base de $\ker(f - \operatorname{Id})$ est $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$, où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On échelonne ensuite $M(3)$:

$$M(3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on applique} \quad \begin{array}{l} L_2 \longleftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{on applique} \quad L_3 \longleftarrow L_3 - \tfrac{1}{2} L_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit qu'une base de $\ker(f - 3\operatorname{Id})$ est $\mathcal{B}_3 = \{v_3\}$ où $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. On appelle $K_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $K_3 = \ker(f - 3\,\mathrm{Id})$. On sait, depuis la question 2, que $\dim(K_1) = 2$ et $\dim(K_3) = 1$. Si $v \in K_1 \cap K_3$, alors $f(v) = v$ car $v \in K_1$ et $f(v) = 3v$ car $v \in K_3$, donc $v = 3v$. On en déduit que $v = \{0\}$. Par la formule de Grassmann, il suit que K_1 et K_3 sont supplémentaires.

   On aurait aussi pu résoudre cette question en remarquant que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour prouver la dernier affirmation, il suffit de démontrer que le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.
4. Vu que K_1 et K_3 sont supplémentaires, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.

1. Vrai. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si AB est inversible, alors

$$0 \neq \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

   Donc $\det(A) \neq 0 \neq \det(B)$, qui implique que A et B sont les deux inversibles.

   On peut faire une démonstration analogue en remarquant que, pour deux fonctions f, g, si leur composée $f \circ g$ est bijective, alors g est injective et f est surjective, puis terminer l'exercice en utilisant que $n \in \mathbb{N}$ est fini.
2. Faux. Par exemple, $\sigma = (1,2) \circ (3,4) \in S_4$ n'est pas un cycle de longueur 2 mais $\sigma^2 = \mathrm{Id}$. (Voir question 4).
3. Faux. Par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Vrai. Les cycles disjoints commutent, donc $(\sigma \circ \tau)^k = \sigma^k \circ \tau^k = \mathrm{Id} \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$.

Exercice 6.

1. On fait les operationes suivantes.

$$C = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \quad \text{on applique} \quad L_k \longleftarrow L_k + iL_{n+k} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n$$

$$\begin{pmatrix} A + iB & iA - B \\ B & A \end{pmatrix} \quad \text{on applique} \quad C_{n+k} \longleftarrow -iC_k + C_{n+k} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n$$

$$\begin{pmatrix} A + iB & 0 \\ B & A - iB \end{pmatrix}$$

   La dernier matrice trouvé est D. Donc $\det(C) = \det(D)$.

2. Vu que D est diagonale par bloc, en utilisant la question 1, il suffit de prouver que $\det(A - iB) = \overline{\det A + iB}$. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on a que

$$\begin{aligned}
\overline{\det(A + iB)} &= \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} + ib_{\sigma(k),k}} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \overline{a_{\sigma(k),k} + ib_{\sigma(k),k}} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k} - ib_{\sigma(k),k} \\
&= \det(A - iB).
\end{aligned}$$

(On à utilisé que les coefficients de A et B sont réelles).

3. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $\det(A + iB) = x + iy$. En utilisant les questions 1 et 2, on a que

$$\det(C) = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \geq 0.$$