Ex. 4

$f(t) = \dfrac{t - \sin t}{t^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

f continue sur $]0, +\infty[$ donc f est intégrable sur tout intervalle du type $[a, b]$ avec $b > a > 0$.
Il reste à étudier la convergence en 0^+ et en $+\infty$.

En $+\infty$: $f(t) = \dfrac{1}{t^{\alpha-1}} \left(1 - \dfrac{\sin(t)}{t}\right)$

$1 - \dfrac{\sin t}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$ car $\sin(t)$ est bornée et $\dfrac{1}{t} \to 0$

D'où $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$

Par Riemann : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha-1}} dt$ cvge $\iff \alpha - 1 > 1$

Par comparaison : $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t) dt$ cvge $\iff \alpha - 1 > 1$
$\iff \alpha > 2$

avec $a > 0$.

au même 4

En 0^+ : $t - \sin(t) \underset{0}{=} t - \left(t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^3)\right)$

$\underset{0}{=} \dfrac{t^3}{6} + o(t^3) \underset{0}{\sim} \dfrac{t^3}{6}$

Donc $f(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{t^3/6}{t^\alpha} = \dfrac{1}{6} \dfrac{1}{t^{\alpha-3}}$

Par Riemann : $\displaystyle\int_0^b \frac{dt}{t^{\alpha-3}}$ cvge $\underset{\forall b > 0}{\iff} \alpha - 3 < 1 \iff \alpha < 4$

Par comparaison : $\displaystyle\int_0^b f(t) dt$ cvge $\iff \alpha < 4$

En réunissant les trois études, on peut conclure que
$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) dt$ cvge $\iff 2 < \alpha < 4$.

Ex. 9 (Question 1 + Autre méthode)

1) a) Soit $t \in \mathbb{R}$: $|\sin t| - \sin^2 t = |\sin t| - |\sin t|^2$

$= \underbrace{|\sin t|}_{\geq 0} \underbrace{(1 - |\sin t|)}_{\geq 0} \geq 0$

(b) Je laisse en exo : ça se fait comme la question 1 de l'ex 7.

(c) On a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \overset{\text{par (a)}}{\geq} \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t}\,dt$$

Par l'absurde supposons que $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ cvge alors $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t}\,dt$ cvge aussi.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2t}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,dt$

et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,dt$ cvge par (b). Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ cvge d'où l'absurdité par Riemann.

- Autre méthode (très proche de la question 2)

Pour $k \in \mathbb{N}$, $|\sin t| = \sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $t \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3\pi}{4}\right]$.

Notons $J_k = \left[2k\pi + \pi/4, 2k\pi + \frac{3\pi}{4}\right]$ et $I_k = [2k\pi, 2(k+1)\pi]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

$$\int_1^{2(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \int_1^{2\pi} + \int_{2\pi}^{2(n+1)\pi} = \int_1^{2\pi} + \sum_{k=1}^{n+1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n+1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$$

Sur J_k : $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{2(k+1)\pi}$ donc $\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{\sqrt{2}/2}{2(k+1)\pi}$

D'où $\int_1^{2(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \geq \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k+1}$

Or $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+1} = +\infty$ (Riemann pour les séries)

donc $\lim_{n \to +\infty} \int_1^{2(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = +\infty$

D'où la divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$.