Ex. 9

1) On constate pour commencer que $F = \text{Vect}\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ ce qui justifie que F est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Notons $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vect. des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

F est engendré par (f_1, f_2, f_3, f_4) donc pour montrer que cette famille est une base F, on va montrer qu'elle est libre.

Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tq $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i f_i = 0_E$. signifie la fonction nulle

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\sum \lambda_i f_i)(x) = 0$

ie $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i f_i(x) = 0$.

On évalue en $x = 0$ et on obtient $\lambda_1 = 0$.

Ensuite on évalue en $x = 2\pi$ et on obtient : $\lambda_3 \, 2\pi e^{-2\pi} = 0$

D'où $\lambda_3 = 0$ également.

Ensuite on évalue en $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$ ce qui donne

$$\begin{cases} \lambda_2 e^{-\pi/2} + \lambda_4 \frac{\pi}{2} e^{-\pi/2} = 0 \\ -\lambda_2 e^{-\frac{3\pi}{2}} - \lambda_4 \frac{3\pi}{2} e^{-3\pi/2} = 0 \end{cases}$$

Après simplification, on obtient $\begin{cases} \lambda_2 + \frac{\pi}{2} \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \frac{3\pi}{2} \lambda_4 = 0 \end{cases}$

Ce système conduit trivialement à $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$.

Finalement la famille est bien libre.

2) a) Soient $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors : $\varphi(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g' = \lambda \varphi(f) + \varphi(g)$

φ est bien linéaire.

b) • $(e^{-x}\cos(x))' = -e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\sin x$ donc $\varphi(f_1) = -f_1 - f_2$

• $(e^{-x}\sin(x))' = -e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x)$ donc $\varphi(f_2) = f_1 - f_2$

• $(xe^{-x}\cos(x))' = (xe^{-x})'\cos(x) - xe^{-x}\sin x = (e^{-x} - xe^{-x})\cos x - xe^{-x}\sin(x)$

donc $\varphi(f_3) = f_1 - f_3 - f_4$

• $(xe^{-x}\sin(x))' = (xe^{-x})'\sin x + xe^{-x}\cos x = (e^{-x} - xe^{-x})\sin x + xe^{-x}\cos x$

donc $\varphi(f_4) = f_2 + f_3 - f_4$

On peut maintenant écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \varphi(f_1) & \varphi(f_2) & \varphi(f_3) & \varphi(f_4) \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{array}$$

3) (a) On va utiliser le déterminant.

$$\det(A) = -1 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{via un dév. / colonne 1}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{via un dév. / colonne 1 dans chaque matrice}$$

$$= 4$$

Ainsi $\det(A) \neq 0$ ie A inversible ie φ est bijective

La matrice de φ^{-1} dans la base $\mathcal{B}$ est A^{-1}.

On obtient :
$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) La colonne 3 de A^{-1} nous dit que $\varphi^{-1}(f_3) = f_2 - f_3 + f_4$

Autrement dit $f_3 = \varphi(f_2 - f_3 + f_4) = (f_2 - f_3 + f_4)'$

Cela signifie qu'une primitive de f_3 est $f_2 - f_3 + f_4$.

4) (a) On $A^4 = -4 I_4 + B$ où $B = 8 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Le calcul nous donne $B^2 = 0$

Ainsi $A^{4n} = (A^4)^n = (-4I + B)^n$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-4I)^k B^{n-k}$$

Ceci est vrai car les matrices $-4I$ et B commutent.

Etant donné que $B^2 = 0$, les termes de cette somme sont nuls dès que $n-k \geq 2$ ie $k \leq n-2$ donc la somme ne contient que les termes d'indice $k = n-1$ et $k = n$.

D'où $A^{4n} = \binom{n}{n-1} (-4I)^{n-1} B + \binom{n}{n} (-4I)^n$
$$= n(-4)^{n-1} B + (-4)^n I$$

$$= (-4)^n \left(n \frac{1}{4} B + I \right)$$

$$= (-4)^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2n & 2n \\ 0 & 1 & -2n & 2n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) La $3^{\text{ème}}$ colonne de A^{4n} correspond à l'expression de $\varphi^{4n}(f_3)$ dans la base $\mathcal{B}$ ie $f_3^{(4n)}$ exprimée dans la base $\mathcal{B}$.

Ainsi $f_3^{(4n)} = (-4)^n \left(2n\, f_1 - 2n\, f_2 + f_3 \right)$.

Ex. 13. $A \in M_n(\mathbb{C})$ $\quad u_A : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$, $M = AM - MA$

1) Soient $M, N \in M_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$u_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A = \lambda(AM - MA) + AN - NA$$
$$= \lambda u_A(M) + u_A(N)$$

2) (a) $u_A(I_n) = A I_n - I_n A = 0$ donc $I_n \in \ker(u_A)$.

On voit que u_A n'est jamais injective car $\forall A$, $\ker(u_A) \neq \{0\}$

(b) La réponse est à nouveau non car en dimension finie, un endomorphisme est surjectif si et s. si il est injectif.

3) $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{C}$.

Notons $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de $M_2(\mathbb{C})$.

$$u_A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u_A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$u_A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$M_{\mathcal{B}}(u_A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Explication pour la $2^{\text{ème}}$ colonne (par exemple) :

$u_A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc la $2^{\text{ème}}$ colonne sera $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ex. 14 (seulement la A) $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{bmatrix}$

On va utiliser le déterminant. Bien que ce soit l'objet de la fiche de TD suivante, c'est la méthode la plus pratique ici.

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1-m \\ 2+m & -1 & 2 \\ 2+m & -m & 3 \end{pmatrix} \quad \text{via } C_1 \leftarrow C_1 - C_2$$

$$= (2+m)\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1-m \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -m & 3 \end{pmatrix}$$ On a factorisé la colonne 1 par $2+m$ grâce à la multilinéarité du dét.

$$= (2+m)\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1-m \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1-m & 1 \end{pmatrix} \quad \text{via } L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$= (2+m)\times(-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1-m \\ 1-m & 1 \end{pmatrix}$$ via un développement par rapport à la colonne 1

$$= (2+m)\times(-1)\left(1-(1-m)^2\right) = (2+m)\left((m-1)^2-1\right)$$
$$= (2+m)\left((m-1-1)(m-1+1)\right) = m(m-2)(m+2)$$

On sait que : $\det(A) \neq 0 \iff A$ inversible $\iff rg(A) = 3$

Ainsi $rg(A) = 3 \iff m \notin \{0, 2, -2\}$.

Il reste à déterminer le rang pour ces trois valeurs particulières (sachant que pour ces valeurs, $rg(A)$ sera ≤ 2).

- Pour $m = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Ici, on voit que $rg(A) \geq 2$ car les colonnes 1 et 2 sont non-colinéaires donc $rg(A) = 2$ puisque $rg(A) \leq 2$.
- Pour $m = 2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ Ici le rg est encore 2 pour les mêmes raisons.
- Pour $m = -2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ Ici les deux premières lignes sont non-colinéaires donc on a encore $rg(A) = 2$

Conclusion : $rg(A) = 2$ pour $m \in \{0, 2, -2\}$ et sinon $rg(A) = 3$.

Ex. 15 Notons $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Soit u l'unique endom. de $\mathbb{K}^n$ tel que $M_{\mathcal{C}}(u) = A$.

On a $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(A) = 1$ par hypothèse.

Ainsi $\ker(u)$ est de dimension $n-1$.

Soit alors $(b_1, \dots, b_{n-1})$ une base de $\ker(u)$.

Par le théorème de la base incomplète, on complète cette famille libre en une base $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_{n-1}, b_n)$ de $\mathbb{K}^n$.

Le vecteur $u(b_n)$ a une décomposition dans la base $\mathcal{B}$:

$$u(b_n) = x_1 b_1 + \dots + x_{n-1} b_{n-1} + \lambda b_n \quad \text{avec } x_1, \dots, x_{n-1}, \lambda \in \mathbb{K}$$

On a alors : • Pour $i = 1, \dots, n-1$, $u(b_i) = 0$ (car $b_i \in \ker(u)$)

donc $u^2(b_i) = u(u(b_i)) = 0 = \lambda u(b_i)$

• De plus
$$\begin{aligned} u^2(b_n) &= u(x_1 b_1 + \dots + x_{n-1} b_{n-1} + \lambda b_n) \\ &= x_1 \underbrace{u(b_1)}_{=0} + \dots + x_{n-1} \underbrace{u(b_{n-1})}_{=0} + \lambda u(b_n) \\ &= \lambda u(b_n) \end{aligned}$$

Ainsi les endomorphismes u^2 et λu coïncident sur tous les élément de la base $\mathcal{B}$, ils sont donc égaux

i.e. $u^2 = \lambda u$.

Cette égalité entraine l'égalité matricielle : $A^2 = \lambda A$.

En effet : $M_{\mathcal{C}}(u^2) = (M_{\mathcal{C}}(u))^2 = A^2$

$$= M_{\mathcal{C}}(\lambda u) = \lambda M_{\mathcal{C}}(u) = \lambda A.$$

<u>Remarque</u> : Une autre façon d'aboutir était de définir la matrice
$$M = M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} u(b_1) & \cdots & u(b_{n-1}) & u(b_n) \\ \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right. & & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \left.\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ \lambda \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{c} \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{array}$$

qui est forcément de cette forme.

Ensuite on calcule M^2 et on obtient $M^2 = \lambda M$.

Cela entraine $u^2 = \lambda u$ puis $A^2 = \lambda A$ (On peut aussi utiliser la matrice de passage $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{C} \to \mathcal{B})$ avec $P^{-1} A P = M$).