Ex. 1

1). $f(x) = \ln(x)$ donc $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$

D'où le DL : $f(x) \underset{2}{=} \ln(2) + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{-1/2^2}{2!}(x-2)^2 + o(x-2)$

· $g(x) = x^3 - x^2 - x - 2$ donc $g'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ et $g''(x) = 6x - 2$

d'où : $g(x) = 0 + 7(x-2) + \frac{10}{2!}(x-2)^2 + o(x-2)$

Notons que f et g sont C^∞ sur $]0,+\infty[$ (et même sur $\mathbb{R}$ pour g)

donc leurs DL existent à tout ordre en tout $x_0 \in]0,+\infty[$.

2) les DL précédents nous disent que $\ln(x) - \ln(2) \underset{2}{\sim} \frac{1}{2}(x-2)$

et $g(x) \underset{2}{\sim} 7(x-2)$

Donc $\frac{\ln(x) - \ln(2)}{x^3 - x^2 - x - 2} \underset{x \to 2}{\sim} \frac{\frac{1}{2}(x-2)}{7(x-2)}$ d'où la limite

$$\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x) - \ln(2)}{x^3 - x^2 - x - 2} = \frac{1/2}{7} = \frac{1}{14}$$

Ex. 2. Notons $f(x) = f_\lambda(x) = \frac{\sin(x)\ln(x)}{x^{\lambda+1}}$ pour $\lambda > 0$.

On a : f est continue sur $]0,+\infty[$ donc f est intégrable sur tout intervalle du type $[a,b]$ avec $0 < a < b \neq +\infty$

Il reste à étudier la convergence de l'intégrale en 0 et $+\infty$.

En 0 : on sait que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\ln(x)}{x^\lambda} = \frac{1}{x^\lambda (\ln(x))^{-1}}$

Par le critère de Bertrand et par comparaison on a cvgence de $\int_0^a f(x)\,dx$ si et s. si $\lambda < 1$ pour tout $a > 0$.

En $+\infty$: Par hypothèse $\lambda > 0$.

On peut écrire $f(x) = \frac{1}{x^{1+\lambda/2}} \times \frac{\sin(x)\ln(x)}{x^{\lambda/2}}$

le sinus étant borné on a : $\left|\frac{\sin(x)\ln(x)}{x^{\lambda/2}}\right| \leq \frac{\ln(x)}{x^{\lambda/2}}$ pour $x \geq 1$

Par croissances comparées $\frac{\ln(x)}{x^{\lambda/2}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. On en conclut que :

$f(x) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{1+\lambda/2}}\right)$.

Par Riemann et par comparaison, $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ cvge $\forall b > 0$, sans condition sur λ.

Finalement : l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ cvge $\Longleftrightarrow \lambda < 1$

Ex. 3 L'affirmation est fausse. Comme contre-exemple, prenons $f(x) = -\frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Pour $x \geq A = 2$, on a bien $g(x) \geq f(x)$. Par Riemann $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge et $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ converge.

Ex. 4. Par hypothèse, f est continue sur $[0, +\infty[$ donc f est intégrable sur $[0, a]$, $\forall a > 0$.

Supposons $\alpha > 1$. Par Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ cvge donc par comparaison $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ cvge aussi et donc $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Supposons $\alpha \leq 1$. Prenons $f : [0, +\infty[$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^\alpha} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
Ainsi, f est continue sur $[0, +\infty[$ et $f \underset{+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$.
Mais par Riemann $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverge donc $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Conclusion : pour $\alpha > 1$, on peut affirmer que l'intégrale converge et pour $\alpha \leq 1$, des contre-exemples dont l'intégrale diverge existent.

Ex. 5

1) Dans A, on remarque dans la ligne 2 il y a un coefficient nul donc si une combinaison du type $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3$ est nulle on a forcément $1 \times \lambda_2 - 1\lambda_3 = 0$ ie $\lambda_2 = \lambda_3$.
L'idée est donc de regarder $C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et on obtient $C_2 + C_3 = C_1$ ie. $C_1 - C_2 - C_3 = 0$.
Par conséquent le rang de A est ≤ 2 donc $rg(A) = 2$ car C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires. Par le th. du rang, $\dim(\ker A) = 1$.
La relation précédente nous dit que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(A)$ et comme $\ker(A)$ est de dim 1, on a $\ker(A) = \text{vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

De plus $\dim(\text{Im}(A)) = rg(A) = 2$ donc $\text{Im}(A)$ (qui est engendrée par les 3 colonnes de A) peut être engendré par deux colonnes seulement si elles sont non-colinéaires ce qui est le cas de C_1 et C_2 par exemple donc $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

2) On en déduit directement que :

$\ker(f) = \mathrm{Vect}\{1 - X - X^2\}$ et $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\{1 - X^2, 2 + X - X^2\}$.

Ex. 6

1) F_1 est bien un sev de E.

Soit $f, g \in F_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$

donc $\lambda f + g \in F_1$

2) F_2 n'est pas un sev de E.

Par exemple : $f : x \longmapsto 1$ est paire et $g : x \longmapsto -x$ impaire

La somme $f+g : x \longmapsto 1 - x$ n'est ni paire ni impaire

($(f+g)(-x) = 1 + x$ et c'est différent $(f+g)(x) = 1 - x$ dès que $x \neq 0$

et c'est différent de $-(f+g(x)) = -1 + x$ pour $x = 0$)

3) F_3 n'est pas un sev de E.

Soit f définie par $f(1) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x-1}$ pour $x \neq 1$

Soit g définie par $g(x) = 1 - f(x)$.

On a bien $f, g \in F_3$ car $\lim_{x \to 1^+} |f(x)| = +\infty$ et idem pour g.

Pourtant la fonction $h = f + g$ est constante égale à 1

et ne satisfait pas $\lim_{x \to 1^+} |h(x)| = +\infty$

Ex. 7 1) Supposons qu'une telle application existe alors par le théorème du rang, on a : $6 = \dim E = \mathrm{rg}(u) + \dim(F) = \mathrm{rg}(u) + 2$.

D'où $\mathrm{rg}(u) = 6 - 2 = 4$ i.e. $\dim(\mathrm{Im}\, u) = 4$.

Or $\mathrm{Im}(u)$ est un sev de E' et $\dim(E') = 3$ donc $\dim(\mathrm{Im}(u)) \leq 3$.

Contradiction.

2) (a) C'est le théorème de la base incomplète : toute famille libre peut être complétée en une base (en dim. finie)

(b) Soit $t \neq 0$.

- Montrons que $F \cap S_t = \{0\}$

L'inclusion "$\supseteq$" est trivial. Montrons l'inclusion inverse.

Soit $x \in F \cap S_t$.

Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $x = \lambda(e_1 + t e_n) \in F$

Comme F est un sev, $x - \lambda e_1 \in F$ ie $\lambda t e_n \in F$

Mais e_n est indépendant de $e_1, \dots, e_n$ donc $\lambda t = 0$. Or $t \neq 0$

donc $\lambda = 0$ et finalement $x = 0$.

- On a : $\dim(F + S_t) = \dim F + \dim S_t - \dim(F \cap S_t)$

$= \dim F + \dim S_t = n - 1 + 1 = n$

Ainsi $F + S_t$ est un sev de E et $\dim(F + S_t) = \dim(E) = n$

D'où $E = F + S_t$

On peut conclure que $E = F \oplus S_t$ i.e. S_t est un supplémentaire de F dans E.