Devoir commun n° 3

La rédaction mathématique et la présentation de votre copie seront prises en compte dans la notation.
(Le barème est indicatif et non définitif)

Partie algèbre

Exercice 1. (/6) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, et soit B_c la base canonique de E. On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par sa matrice A dans la base B_c :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. *Éléments propres de f.*
   (a) Calculer le polynôme caractéristique de f.
   (b) Déterminer une base de l'espace propre $E_1(f)$, et en déduire sa dimension.
   (c) Notons $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A \cdot v_1$ et $A \cdot v_2$, et en déduire une base du deuxième sous-espace propre de f.
2. *Diagonalisation et application.*
   (a) Montrer que A est diagonalisable et exhiber une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
   (b) Sans effectuer de calculs, et en utilisant la question précédente, détailler la méthode pour obtenir une expression de $f^n = f \circ ... \circ f$.

Exercice 2. (/4) On considère l'endomorphisme Δ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ défini par, $\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\Delta(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \textit{(Autrement dit : } \forall n \in \mathbb{N},\ \Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n\textit{)}.$$

1. Déterminer l'ensemble des suites u telles que $u \in \operatorname{Ker}(\Delta)$.
2. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés de Δ.

Exercice 3. (/3)

1. Énoncer le théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions.
2. Justifier l'existence et déterminer la limite en $+\infty$ de la suite définie pour tout $n \geq 3$:

$$u_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t^n + t^{-n}}} dt.$$

Exercice 4. (/3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]-1;1[$ on pose

$$f_n(x) = \frac{x^n \sin(nx)}{n}.$$

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.
2. On pose $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$, montrer que f est C^1 sur $]-1,1[$.

Exercice 5. (/4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$g_n(x) = (-1)^n \frac{n}{n^2 + x^2}$$

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un segment. Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur I ?