Topologie des espaces vectoriels normés

dejou@math.univ-lyon1.fr

Dans toute la suite, $(E, \|\,.\,\|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Les notions qui suivent ne seront pas modifiées lorsqu'on passe d'une norme à une norme équivalente. En particulier, si l'espace E est de dimension finie, elles ne dépendent pas de la norme choisie.

1. Parties ouvertes et fermées

1.1. Parties ouvertes

Définition 1.1

On appelle **voisinage** *d'un élément $x \in E$ toute partie $V \subset E$ vérifiant :*

$$\exists r > 0, \quad B(x, r) \subset V.$$

Définition 1.2

Une partie $\mathcal{U}$ de E est dite **ouverte** *si elle est voisinage de chacun de ses points, i.e.*

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset \mathcal{U}.$$

On dit encore que $\mathcal{U}$ est un ouvert de E.

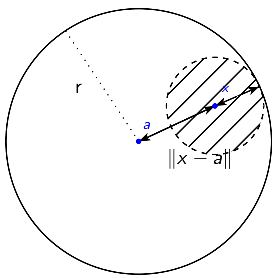

Figure – Une boule ouverte est ouverte

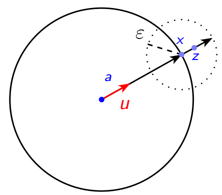

Figure – Une sphère n'est pas ouverte.

Proposition 1.3

Une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

Proposition 1.4

Une intersection **finie** *d'ouverts est un ouvert.*

Proposition 1.5

Si $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_p$ sont des ouverts des espaces normés $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ alors $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_p$ est un ouvert de l'espace normé produit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ muni de la norme produit.

Démonstration : Commençons par préciser les boules de E. Notons $N_1, \dots, N_p$ les normes sur $E_1, \dots, E_p$ et $\|\,.\,\|$ la norme sur E définie pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$ par $\|x\| = \max\limits_{1 \le k \le p} N_k(x_k)$. Soit $a = (a_1, \dots, a_p) \in E$ et $r > 0$,

$$\begin{aligned} x \in B(a, r) \quad &\iff \quad \|x - a\| = \max_{1 \le k \le p} N_k(x_k) < r \\ &\iff \quad \forall k \in [\![1; p]\!], \quad N_k(x_k) < r \\ &\iff \quad \forall k \in [\![1; p]\!], \quad x_k \in B_k(a_k, r) \end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$B(a, r) = \prod_{k=1}^{p} B_k(a_k, r).$$

Soient $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_p$ des ouverts de $E_1, \dots, E_p$ et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_p$. Soit $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{U}$. Pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, $a_k \in \mathcal{U}_k$, or $\mathcal{U}_k$ est ouvert, donc il existe $r_k > 0$ tel que $B_k(a_k, r_k) \subset \mathcal{U}_k$. Considérons alors

$$r = \min\{r_k \mid k \in [\![1; p]\!]\} > 0.$$

Pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, $B_k(a_k, r) \subset \mathcal{U}_k$, donc

$$B(a, r) = \prod_{k=1}^{p} B_k(a_k, r) \subset \prod_{k=1}^{p} \mathcal{U}_k = \mathcal{U}.$$

1.2. Parties fermées

Définition 1.6

Une partie F de E est dite **fermée** *si son complémentaire (dans E) est un ouvert. On dit aussi que F est un fermé de E.*

Remarque : Pour une partie $X \subset E$, la notation probabiliste $\overline{X}$ du complémentaire est à proscrire : elle est utilisée pour une autre notion en topologie, l'adhérence, que l'on verra dans la suite. On notera donc X^c s'il n'y a pas de confusion possible sur l'espace normé E, ou $E \backslash X$.

Proposition 1.7

Une intersection (finie ou infinie) de fermés de E est un fermé de E.

Proposition 1.8

Une union **finie** *de fermés de E est un fermé de E.*

Proposition 1.9 (Caractérisation séquentielle des fermés)

Une partie F de E est fermée si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ appartient à F, ce qui s'écrit encore :

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Rightarrow \quad \ell \in F.$$

Remarque : Attention, cela ne signifie pas que dans un fermé toutes les suites convergent !

Proposition 1.10

Si $F_1, \dots, F_p$ sont des fermés des espaces normés $E_1, \dots, E_p$ alors $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé produit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ pour la norme produit.

2. Intérieur, adhérence et densité

2.1. Intérieur

Définition 2.1

*Un élément $a \in E$ est dit **intérieur** à une partie $X \subset E$ si X est un voisinage de a, i.e. $\exists r > 0,\ B(a, r) \subset X$.*

L'intérieur de X, noté $\overset{\circ}{X}$, est l'ensemble de tous les points intérieurs à X, c'est-à-dire $\overset{\circ}{X} = \{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x, r) \subset X\}$.

Remarque : On a toujours l'inclusion $\overset{\circ}{X} \subset X$.

Proposition 2.2

Une partie $X \subset E$ est ouverte si et seulement si $\overset{\circ}{X} = X$.

Proposition 2.3

Soit X une partie de E, alors $\overset{\circ}{X}$ est la réunion de tous les ouverts inclus dans X. Par conséquent, $\overset{\circ}{X}$ est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans X.

2.2. Adhérence

Définition 2.4

*On dit qu'un élément $a \in E$ est **adhérent** à une partie $X \subset E$ si*

$$\forall r > 0, \quad B(a, r) \cap X \neq \emptyset.$$

*On appelle **adhérence** de X l'ensemble, noté $\overline{X}$, des éléments adhérents à X.*

Remarque : On a toujours l'inclusion $X \subset \overline{X}$ puisque pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, $x \in B(x, r) \cap X$.

Proposition 2.5

Soit X une partie de E, alors

$$E \backslash \overline{X} = (E \backslash X)^{\circ} \quad \text{et} \quad E \backslash \overset{\circ}{X} = \overline{E \backslash X}.$$

Proposition 2.6

Une partie $X \subset E$ est fermée si et seulement si $\overline{X} = X$.

Proposition 2.7

Soit X une partie de E, alors $\overline{X}$ est l'intersection de tous les fermés contenant X. Par conséquent, $\overline{X}$ est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant X.

Proposition 2.8 (Caractérisation séquentielle des points adhérents)

Soient X une partie de E et $a \in E$. On a équivalence entre :

1. *a est adhérent à X,*
2. *il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers a.*

2.3. Frontière

Définition 2.9

*On appelle **frontière** d'une partie X de E l'ensemble $\mathrm{Fr}(X) = \overline{X} \backslash \overset{\circ}{X}$.*

Remarque : On peut voir que

$$\mathrm{Fr}(X) = \overline{X} \cap (E \backslash \overset{\circ}{X}) = \overline{X} \cap \overline{E \backslash X} = \mathrm{Fr}(E \backslash X)$$

Cette écriture permet aussi de démontrer que $\mathrm{Fr}(X)$ est un fermé de E.

2.4. Densité

Definition 1

Une partie X de E est dite **dense** si $\overline{X} = E$.

Proposition 2.10

Soit X une partie de E. On a équivalence entre :

1. *X est une partie dense de E,*
2. *$\forall a \in E, \quad \forall r > 0, \quad B(a, r) \cap X \neq \emptyset$,*
3. *$\forall a \in E, \quad \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \quad x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.*

3. Parties compactes

3.1. Suites extraites

Définition 3.1

*Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On appelle **suite extraite** (ou sous-suite) de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.*

Remarque : Si $w = (w_n)_n$ est une suite extraite de $v = (v_n)_n$, elle-même extraite de $u = (u_n)_n$, alors la suite w est une suite extraite de u. En effet, notons $v = (u_{\varphi(n)})_n$ et $w = (v_{\psi(n)})_n$ avec $\varphi, \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissantes, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$w_n = v_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))} = u_{\varphi \circ \psi(n)}$$

avec $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante comme composée de deux fonctions strictement croissantes.

Théorème 3.2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Si $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in E$, alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge aussi vers ℓ.

3.2. Compacts

Définition 3.3

*Une partie K de E est dite **compacte** si toute suite d'éléments de K possède une sous-suite convergente dans K, i.e.*

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}},\ \exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante },\ x_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in K.$$

On dit aussi que K est un compact de E.

Proposition 3.4

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Théorème 3.5

Si E est un espace de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.

Corollaire 3.6 (Généralisation du théorème de Bolzano-Weierstrass)

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée admet une sous-suite convergente.