Dans toute la suite, n et p désignent des entiers naturels non nuls, et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1

*Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est **scalaire** si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si $p = 1$. On dit que f est à **valeurs vectorielles** sinon.*

Définition 2

*Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$. Pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, l'application $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée **i-ème fonction composante** (ou **i-ème fonction coordonnée**) de f.*

Définition 3

*Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$. Pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, on définit l'**application partielle** $f_{a,j}$ par*

$$f_{a,j} : \begin{array}{ccl} U_{a,j} \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \end{array}$$

où $U_{a,j} = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in U\}$ (la notation est abusive dans les cas $j = 1$ et $j = n$ pour lesquels il faut remplacer les expressions ci-dessus par $(t, a_2, \ldots, a_n)$ et $(a_1, \ldots, a_{n-1}, t)$ respectivement).

Définition 4

*Soit I un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est **dérivable** en a si le taux d'acroissement*

$$\frac{1}{t}(f(a+t) - f(a))$$

*converge lorsque $t \to 0$ (avec $t \neq 0$). Sa limite est alors appelée **vecteur dérivé** de f en a et noté $f'(a)$.*

Définition 5

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite dérivable si elle l'est en tout point de l'ouvert non vide I. On peut alors introduire l'application $f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & f'(t) \end{array}$ appelée fonction dérivée de f.

Théorème 6

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_p$. On a équivalence entre :

(i). f est dérivable,

(ii). les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ sont dérivables.

De plus, si tel est le cas, on a

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_p'(t)).$$

Définition 7

*Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f admet une **dérivée partielle** par rapport à sa j-ième variable au point a (encore appelée j-ième dérivée partielle en a) si l'application partielle $f_{a,j}$ est dérivable au point a_j.*

On note alors $\partial_j f(a)$ *ou* $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ *cette dérivée, c'est-à-dire*

$$\begin{aligned}\partial_j f(a) &= f'_{a,j}(a_j) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+t,a_{j+1},\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_n)}{t}.\end{aligned}$$

Définition 8

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *admet une dérivée partielle par rapport à sa* j*-ième variable en tout point* $a \in U$*, l'application* $\partial_j f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *est appelée* j*-ième dérivée partielle de* f*.*

Proposition 9

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $f_1,\dots,f_p : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *ses applications coordonnées. On a équivalence entre :*

(i). f *admet des dérivées partielles,*

(ii). *les fonctions coordonnées de* f *admettent des dérivées partielles.*

De plus, on a alors $(\partial_i f)_k = \partial_i(f_k)$ *où l'on a noté* f_k *et* $(\partial_i f)_k$ *les fonctions coordonnées de* f *et* $\partial_i f$*.*

Définition 10

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $a \in U$*. Si* f *admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables au point* a*, on définit la matrice* ***Jacobienne*** *de* f *au point* a*, notée* $J_f(a)$*, comme la matrice à* p *lignes et* n *colonnes dont les coefficients sont*

$$(J_f(a))_{i,j} = \partial_j f_i(a) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \quad \forall i \in [\![1;p]\!], \forall j \in [\![1;n]\!].$$

On remarque que $J_f(a) \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$*.*

Définition 11

Toujours sous réserve d'existence des dérivées partielles de f*, soit* $a \in U$ *:*

- *si* f *est scalaire (i.e* $p = 1$*), on définit le* ***gradient*** *de* f *au point* a*, noté* $\mathrm{grad} f(a)$ *ou* $\nabla f(a)$*, par*

$$\mathrm{grad} f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix} = {}^t J_f(a)$$

- *si* $n = p$ *(i.e.* $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$*), on définit la* ***divergence*** *de* f *au point* a *par*

$$\mathrm{div} f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i(a) = (J_f(a))$$

- *si* $n = p = 3$*, on définit le* ***rotationnel*** *de* f *au point* a *par*

$$\mathrm{rot} f(a) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3(a) - \partial_3 f_2(a) \\ \partial_3 f_1(a) - \partial_1 f_3(a) \\ \partial_1 f_2(a) - \partial_2 f_1(a) \end{pmatrix}$$

Définition 12

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$*,* $a \in U$ *et* $v \in \mathbb{R}^n$*. On dit que* f *est* ***dérivable selon le vecteur*** v *en* a *(ou*

admet une dérivée directionnelle suivant v en a) si la fonction d'une variable réelle $\varphi : t \longmapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0.
On appelle alors dérivée selon le vecteur v de f en a la valeur de cette dérivée, notée

$$D_v f(a) = \varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a)).$$

Proposition 13

Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $a \in U$. Soit $j \in [\![1;n]\!]$. La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à sa j-ième variable en a si et seulement si elle admet une dérivée directionnelle selon le vecteur e_j en a.
Si c'est le cas, on a alors

$$\partial_j f(a) = D_{e_j} f(a).$$

Définition 14

Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite ***différentiable*** *en $a \in U$ s'il existe une application linéaire $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que*

$$\lim_{h \overset{\neq}{\to} 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|f(a+h) - f(a) - u(h)\|}{\|h\|} = 0 \qquad (*)$$

Proposition 15

Si f est différentiable en a, l'application linéaire u est unique. On la note $\mathrm{d}f(a)$, appelée différentielle de f en a. Par définition, $\mathrm{d}f(a)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Théorème 16

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Si f est différentiable en $a \in U$, alors f est continue en a.

Définition 17

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est ***différentiable*** *(sur U) si f est différentiable en tout point de U. L'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f : & U & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ & a & \longmapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

est alors appelée différentielle de f.

Proposition 18

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est constante, alors f est différentiable et sa différentielle est l'application nulle : pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(a) = \widetilde{0}$.

Proposition 19

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est linéaire, alors f est différentiable et sa différentielle est constante :

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}f(a) = f.$$

Proposition 20

Si $\varphi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est une application bilinéaire, alors φ est différentiable, et on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m, \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m, \quad \mathrm{d}\varphi(x,y)(h,k) = \varphi(x,k) + \varphi(h,y).$$

Proposition 21

Soient I un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On a équivalence entre :

(i). f est différentiable en a,

(ii). f est dérivable en a.

Dans ce cas, on a alors

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{d}f(a)(h) = hf'(a) \quad \text{et} \quad f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1)$$

où l'on rappelle que $f'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a+t) - f(a))$.

Théorème 22

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f est dérivable en a selon tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ et on a

$$D_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v).$$

Théorème 23

Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable, alors f admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables, et pour tout $a \in U$, on a

$$\partial_i f(a) = \mathrm{d}f(a)(e_i) \quad \forall i \in [\![1;n]\!].$$

De plus, pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Proposition 24

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, la matrice Jacobienne de f en a est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement.

Proposition 25

Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si f et g sont différentiables, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi et

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda \,\mathrm{d}f + \mu \,\mathrm{d}g.$$

Démonstration : Soit $a \in U$. Pour $h \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $a+h \in U$, on a

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & \frac{\|(\lambda f + \mu g)(a+h) - (\lambda f + \mu g)(a) - (\lambda \, \mathrm{d}f(a) + \mu \, \mathrm{d}g(a))(h)\|}{\|h\|} \\ & \leq |\lambda| \, \frac{\|f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)(h)\|}{\|h\|} + |\mu| \, \frac{\|g(a+h) - g(a) - \mathrm{d}g(a)(h)\|}{\|h\|} \\ & \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

avec $\lambda \, \mathrm{d}f(a) + \mu \, \mathrm{d}g(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, ce qui démontre que $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \, \mathrm{d}f(a) + \mu \, \mathrm{d}g(a)$. ■

Proposition 26

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_p$. On a équivalence entre :

(i). *f est différentiable,*

(ii). *les fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_p$ de f sont différentiables.*

Dans ce cas, on a

$$\forall a \in U, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}f(a)(h) = (\, \mathrm{d}f_1(a)(h), \ldots, \, \mathrm{d}f_p(a)(h)).$$

Démonstration : Soit $a \in U$ fixé.

- $(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons que f est différentiable en a Notons $(\, \mathrm{d}f(a))_1, \ldots, (\, \mathrm{d}f(a))_p$ les fonctions coordonnées de $\mathrm{d}f(a)$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $a+h \in U$, on a

  $$f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)(h) = (f_1(a+h) - f_1(a) - (\, \mathrm{d}f(a))_1(h), \ldots, f_p(a+h) - f_p(a) - (\, \mathrm{d}f(a))_p(h))$$

  Par propriétés des limites vectorielles, $\dfrac{1}{\|h\|}(f(a+h) - f(a) - \mathrm{d}f(a)(h))$ tend vers $0_{\mathbb{R}^p}$ si et seulement si chacune de ses composantes tend vers 0, ce qui démontre que pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, f_i est différentiable en a (car $(\, \mathrm{d}f(a))_i$ est linéaire puisque $\mathrm{d}f(a)$ l'est), et que $\mathrm{d}f_i(a) = (\, \mathrm{d}f(a))_i$.
- $(ii) \Rightarrow (i)$: un raisonnement analogue en sens inverse démontre que si pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, f_i est différentiable en a, il en est de même pour f. ■

Théorème 27 (*Différentiation de fonctions composées*)

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, V un ouvert de $\mathbb{R}^p$ tel que $f(U) \subset V$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$. Si f est différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $f(a) \in V$, la fonction composée $g \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est différentiable en a et

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}(g \circ f)(a)(h) = \, \mathrm{d}g(f(a))\Big(\, \mathrm{d}f(a)(h)\Big).$$

Par suite, si f et g sont différentiables, $g \circ f$ est aussi différentiable et

$$\forall a \in U, \quad \mathrm{d}(g \circ f)(a) = \, \mathrm{d}g(f(a)) \circ \, \mathrm{d}f(a).$$

Démonstration : Soit $a \in U$. On suppose que f est différentiable en a et que g est différentiable en $f(a)$. Il existe alors une fonction ε définie au voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + \, \mathrm{d}f(a)(h) + \|h\| \varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(h) \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{\longrightarrow} 0_{\mathbb{R}^p}.$$

On peut donc écrire $f(a+h)$ sous la forme

$$f(a+h) = f(a) + h' \quad \text{en posant} \quad h' = \mathrm{d}f(a)(h) + \|h\|\varepsilon(h).$$

Par continuité et linéarité de $\mathrm{d}f(a)$, on remarque que lorsque $h \to 0_{\mathbb{R}^n}$, $h' \to 0_{\mathbb{R}^p}$. Comme g est différentiable en $f(a)$, il existe une fonction η définie au voisinage de $0_{\mathbb{R}^p}$ vérifiant en particulier

$$g(f(a)+h') = g(f(a)) + \mathrm{d}g(f(a))(h') + \|h'\|\eta(h') \quad \text{avec} \quad \eta(h') \underset{h\to 0_{\mathbb{R}^n}}{\longrightarrow} 0_{\mathbb{R}^d}.$$

Par suite, on peut donc écrire

$$\begin{aligned}(g\circ f)(a+h) &= (g\circ f)(a) + \mathrm{d}g(f(a))(\mathrm{d}f(a)(h)) + \|h\|\,\mathrm{d}g(f(a))(\varepsilon(h)) + \|h'\|\eta(h')\\ &= (g\circ f)(a) + (\mathrm{d}g(f(a))\circ \mathrm{d}f(a))(h) + \varphi(h)\end{aligned}$$

avec $\varphi(h) = \|h\|\,\mathrm{d}g(f(a))(\varepsilon(h)) + \|h'\|\eta(h')$. Par continuité de $\mathrm{d}f(a)$, il existe $C \geq 0$ tel que

$$\|\mathrm{d}f(a)(h)\| \leq C\|h\| \quad \text{d'où} \quad \|h'\| = \|\mathrm{d}f(a)(h) + \|h\|\varepsilon(h)\| \leq (C + \|\varepsilon(h)\|)\|h\|,$$

ce qui implique que

$$\|\varphi(h)\| \leq (\|\mathrm{d}g(f(a))(\varepsilon(h))\| + (C+\|\varepsilon(h)\|)\|\eta(h')\|)\|h\|.$$

On a donc au final $\varphi(h) = o(\|h\|)$ lorsque $h \to 0_{\mathbb{R}^n}$. Puisque la fonction $\mathrm{d}g(f(a))\circ \mathrm{d}f(a)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$, ceci démontre que $g\circ f$ est différentiable en a et que $\mathrm{d}(g\circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a))\circ \mathrm{d}f(a)$. ■

Corollaire 28 (*Version matricielle*)

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telles que $f(U) \subset V$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, g différentiable en $f(a)$, alors on a

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a).$$

Corollaire 29 (*Formule de dérivation en chaîne*)

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telles que $f(U) \subset V$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors les dérivées partielles de $g\circ f$ en a sont données par

$$\partial_i(g\circ f)(a) = \sum_{k=1}^{p} \partial_i f_k(a)\partial_k g(f(a)) \quad \forall i \in [\![1;n]\!]$$

où l'on a noté $f_1, \dots, f_p$ les fonctions coordonnées de f.

Remarque : Si l'on convient de noter $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées d'un vecteur générique $x \in \mathbb{R}^n$ et $y_1, \dots, y_p$ celles d'un vecteur générique $y \in \mathbb{R}^p$, la formule précédente se récrit sous la forme

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a)\frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \quad \forall i \in [\![1;n]\!].$$

Proposition 30

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\lambda : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction scalaire et $a \in U$. Si f et λ sont *différentiables en a, il en est de même de la fonction λf et on a*

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}(\lambda f)(a)(h) = \lambda(a)\,\mathrm{d}f(a)(h) + \mathrm{d}\lambda(a)(h)f(a) \quad \textit{i.e.} \quad \mathrm{d}(\lambda f)(a) = \mathrm{d}\lambda(a)f(a) + \lambda(a)\,\mathrm{d}f(a).$$

Définition 31

Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite ***de classe $\mathcal{C}^1$*** *ou* ***continûment différentiable*** *si elle est différentiable et si sa différentielle $\mathrm{d}f : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est continue.*

Théorème 32

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On a équivalence entre :

- (i). *f est de classe $\mathcal{C}^1$,*
- (ii). *pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, la dérivée partielle de f par rapport à sa i-ème variable $\partial_i f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ existe et est continue.*