Définition 1

Une **suite numérique** *est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou de $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$ pour $n_0 \in \mathbb{N}$) dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour une suite réelle ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ pour une suite complexe. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n\geq n_0}$) la suite de terme général u_n.*

Définition 2

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique. On appelle **série de terme général** *u_n la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie par :*

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

On note cette série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ou $\sum u_n$. Les S_n sont appelés les **sommes partielles** *de rang n de cette série.*

Définition 3

La série numérique de terme général u_n est **convergente** *lorsque la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\geq n_0}$ converge, c'est-à-dire lorsqu'il existe $S \in \mathbb{K}$ tel que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k = S.$$

Cette limite S est appelée la **somme** *de la série et est notée :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = S.$$

En cas de convergence, on note pour tout $n \geq n_0$:

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

le **reste** *d'ordre n de la série.*

Définition 4

Une série non convergente est dite **divergente**. *La* **nature** *d'une série est sa convergence ou sa divergence.*

Proposition 5

Si la série $\sum u_n$ converge, la suite des restes $(R_n)_n$ converge vers 0.

Proposition 6

Une **série téléscopique** *est une série dont le terme général est de la forme $u_{n+1} - u_n$ pour une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Une série téléscopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, on a alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0.$$

Proposition 7 (*Condition nécessaire de convergence d'une série*)

Si la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge, alors* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Définition 8

Si la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas vers* 0*, alors on dit que la série de terme général* u_n ***diverge grossièrement****.*

Proposition 9 (*Opérations sur les séries*)

Soit $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *deux séries numériques convergentes. Pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$*, la série numérique* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda u_n + v_n)$ *converge.*

Corollaire 10

Si $\sum u_n$ *est une série numérique convergente et* $\sum v_n$ *une série numérique divergente, alors la série* $\sum(u_n + v_n)$ *est une série divergente.*

Théorème 11 (*Convergence des séries à termes positifs*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels positifs. Alors la série* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge si et seulement si il existe* $M \in \mathbb{R}_+$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$ *(c'est-à-dire si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée).*

De plus, si la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge, alors :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right)$.

Corollaire 12 (*Comparaison de séries à termes positifs*)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de nombres réels positifs tels que* $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *(ou pour* $n \geq n_0$ *avec* $n_0 \in \mathbb{N}$ *fixé).*

(i) Si la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *converge, alors la série* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge.*

(ii) Si la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *diverge, alors la série* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *diverge.*

Corollaire 13

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites de réels positifs. On suppose que* $u_n = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(v_n)$ *(ceci est vrai en particulier si* $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$*), alors :*

(i) si $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge,*

(ii) si $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Corollaire 14 (***Nature de deux séries équivalentes***)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ ont même nature.

Proposition 15 (***Règle de d'Alembert***)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique à termes **strictement positifs***. On suppose $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.*

(i) Si $\ell > 1$, alors la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge grossièrement.

(ii) Si $\ell < 1$, alors la série numérique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

(iii) Si $\ell = 1$, alors on ne peut rien dire.

Remarque : La règle de d'Alembert s'applique encore lorsque $u_n > 0$ seulement à partir d'un certain rang n_0.

Théorème 16 (***Comparaison série-intégrale***)

Soit $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue, décroissante, à valeurs positives. Alors la série numérique $\sum f(n)$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Proposition 17 (***Séries géométriques***)

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série de terme général q^n converge si et seulement si $|q| < 1$.

Théorème 18 (***Séries de Riemann***)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série numérique à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition 19 (***Série définissant l'exponentielle***)

La série numérique $\displaystyle\sum \frac{a^n}{n!}$ converge pour tout réel $a \in \mathbb{R}^+$.

Proposition 20 (***Critère de Cauchy pour les séries***)

La série numérique $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

Définition 21

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la série $\sum u_n$ **converge absolument** *(ou est absolu-*

ment convergente) si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 22 (*Série absolument convergente*)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique absolument convergente. Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et de plus :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Définition 23

*Une série convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**.*

Définition 24

*Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **alternée** si :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n |u_n| \qquad \textit{ou} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^{n+1}|u_n|.$$

(En d'autres termes, on demande que $(-1)^n u_n$ soit de signe constant, ce qui s'écrit encore $u_{n+1}u_n \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$)

*Une série réelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est **alternée** si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est.*

Théorème 25 (*Critère des séries alternées*)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée. Si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge.

De plus, la somme de la série est encadrée par les sommes partielles consécutives.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et vérifie :

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|.$$

Corollaire 26

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère des séries alternées. Le signe de la somme est celui de son premier terme.

Proposition 27 (*Règle d'Abel*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes. On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, que la série $\sum |v_n - v_{n+1}|$ converge, et que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est bornée, c'est-à-dire

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq M,$$

alors la série $\sum u_n v_n$ *converge.*

Corollaire 28

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe telle que*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq M,$$

et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite* ***réelle, décroissante****, qui converge vers* 0*, alors la série* $\sum u_n v_n$ *converge.*

Théorème 29 (*Sommation des relations de comparaison*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite* ***réelle à termes positifs****.*

1. *On suppose que la série* $\sum v_n$ ***diverge****.*
   - *Si* $u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
   - *Si* $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
2. *On suppose que la série* $\sum v_n$ ***converge****.*
   - *Si* $u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
   - *Si* $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

Démonstration : On commence par le cas où la série $\sum v_n$ diverge. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Puisque la série $\sum v_n$ est une série à termes positifs divergente, la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ en croissant.

- Supposons que $u_n \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$. Alors il existe $M > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $|u_n| \leq M v_n$ pour $n \geq N$. Pour tout $n > N$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} |U_n| &= \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n} u_k\right| \\ &\leq |U_N| + \sum_{k=N+1}^{n} |u_k| \\ &\leq |U_N| + \sum_{k=N+1}^{n} M v_k \\ &\leq |U_N| + M V_n \end{aligned}$$

puisque la suite $(v_n)_n$ est à valeurs positives. Puisque la suite $(MV_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et $|U_N| \geq 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 > N$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $MV_n \geq |U_N|$. par suite, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|U_n| \leq 2MV_n$$

ce qui démontre que $U_n = \mathcal{O}_{n\to+\infty}(V_n)$.

- Supposons désormais que $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$, alors il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 et $N \in \mathbb{N}$ tels que $u_n = \varepsilon_n v_n$ pour tout $n \geq N$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}, n_0 > N$ tel que $|u_n| \leq \varepsilon v_n$, pour tout $n \geq n_0$. Soit $n \geq n_0$, alors

$$\begin{aligned} |U_n| &\leq \left|\sum_{k=0}^{n_0} u_k\right| + \sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k| \\ &\leq |U_{n_0}| + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k \\ &\leq |U_{n_0}| + \varepsilon V_n \end{aligned}$$

puisque la suite $(v_n)_n$ est positive. Puisque la suite $(\varepsilon V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, et $|U_{n_0}| \geq 0$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $\varepsilon V_n \geq |U_{n_0}|$. Pour tout $n \geq n_1$, on a donc finalement

$$|U_n| \leq 2\varepsilon V_n$$

ce qui achève de démontrer que $U_n = \underset{n\to+\infty}{o}(V_n)$.

On suppose désormais que la série $\sum v_n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on a déjà dans les deux cas le fait que la série $\sum u_n$ converge absolument. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\widehat{U_n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \text{et} \quad \widehat{V_n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

les restes étudiés.

- Si $u_n = \underset{+\infty}{\mathcal{O}}(v_n)$, alors il existe $M > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq Mv_n$. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. En passant par une somme tronquée jusqu'à $N > n$, on a

$$\left|\sum_{k=n+1}^{N} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{N} |u_k| \leq M \sum_{k=n+1}^{N} v_k \leq M\widehat{V_n}$$

ce qui implique en faisant tendre N vers $+\infty$: $\left|\widehat{U_n}\right| \leq M\widehat{V_n}$ ce qui démontre le résultat voulu.

- Si $u_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$, on se donne $\varepsilon > 0$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n| \leq \varepsilon v_n$ pour tout $n \geq n_0$. Il suffit alors de remplacer M par ε dans la démonstration précédente, pour $n \geq n_0$. ■

Corollaire 30 (*Sommation des équivalents*)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ***à valeurs positives*** *telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.*

- *Si l'une des deux séries diverge, l'autre diverge aussi et on a l'équivalent :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

- *Si l'une des deux séries converge, l'autre converge aussi et on a l'équivalent :*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

Démonstration : Puisque $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a la comparaison $u_n - v_n = \underset{+\infty}{o}(v_n)$ avec $v_n \geq 0$ pour tout n. On applique alors le théorème précédent qui donne la négligeabilité de la somme partielle (ou du reste) de $u_n - v_n$ devant celle (ou celui) de v_n et donc l'équivalence voulue. ■

Définition 31

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On appelle ***produit de Cauchy*** *des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série de terme général w_n défini par*

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_k.$$

Remarque : On note aussi parfois le terme général w_n sous la forme $w_n = \displaystyle\sum_{p+q=n} u_p v_q$.

Théorème 32 (*Produit de Cauchy (admis)*)

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors la série produit de Cauchy $\sum w_n$ converge aussi absolument et on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Démonstration :

- On suppose dans un premier temps que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$. On introduit les ensembles suivants, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$C_N = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p \leq N, q \leq N\} \quad \text{et} \quad T_N = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q \leq N\}.$$

On a alors

$$\sum_{(p,q)\in C_N} u_p v_q = \sum_{p=0}^{N} u_p \sum_{q=0}^{N} v_q \quad \text{et} \quad \sum_{(p,q)\in T_N} u_p v_q = \sum_{n=0}^{N} w_n.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. L'inclusion $T_N \subset C_N$ et la positivité des termes $u_p v_q$ entraînent

$$\sum_{n=0}^{N} w_n \leq \sum_{p=0}^{N} u_p \sum_{q=0}^{N} v_q \leq \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \sum_{q=0}^{+\infty} w_q$$

Par suite, la suite croissante des sommes partielles de $\sum w_n$ est majorée donc convergente, ce qui démontre la convergence de la série $\sum w_n$ et l'inégalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \leq \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \sum_{q=0}^{+\infty} v_q.$$

En outre, on dispose aussi de l'inclusion $C_N \subset T_{2N}$, d'où

$$\sum_{p=0}^{N} u_p \sum_{q=0}^{N} v_q \leq \sum_{n=0}^{2N} w_n$$

puis par passage à la limite

$$\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \sum_{q=0}^{+\infty} w_q \leq \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

ce qui démontre l'égalité voulue.

- On suppose désormais que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont à valeurs réelles quelconques. On définit $(u_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^+ = \max(u_n, 0) \quad \text{ et } \quad u_n^- \max(-u_n, 0)$$

(de même pour la suite $(v_n)_n$). Puisque pour tout n, $|u_n| = u_n^+ + u_n-$ et $u_n = u_n^+ - u_n^-$, l'absolue convergence de $\sum u_n$ implique celle de $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$. On transite alors par ces nouvelles séries à termes positifs. Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|w_n| = \left| \sum_{p+q=n} u_p v_q \right| \leq \sum_{p+q=n} |u_p|\,|v_q|$$

et en appliquant le résultat que l'on vient de démontrer au produit de Cauchy des séries $\sum |u_n|$ et $|v_n|$, on obtient la convergence absolue de $\sum w_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut aussi écrire

$$w_n = \sum_{p+q=n} (u_p^+ - u_p^-)(v_q^+ - v_q^-) = \sum_{p+q=n} u_p^+ v_q^+ - \sum_{p+q=n} u_p^+ v_q^- - \sum_{p+q=n} u_p^- v_q^+ + \sum_{p+q=n} u_p^- v_q^-$$

On applique alors l'égalité démontrée sur les 4 termes apparaissant (qui sont des produits de Cauchy de séries à termes positifs), ce qui donne le résultat voulu :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} w_n &= \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p^+\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q^+\right) - \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p^+\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q^-\right) - \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p^-\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q^+\right) + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p^-\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q^-\right) \\ &= \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right)\end{aligned}$$

- Enfin, si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont à valeurs complexes, on transite par les parties réelles et imaginaires. ■