Dans ce chapitre, on s'intéresse à des fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. D désigne une partie de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Définition 1

On appelle série de fonctions de terme général f_n la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f_k.$$

Cette série de fonctions est notée $\sum_{n\geq n_0} f_n$ et S_n est appelée somme partielle de rang n de celle-ci.

Définition 2

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ ***converge simplement*** *sur $A \subset D$ si la suite de fonctions $(S_n)_n$ de ses sommes partielles converge simplement sur A vers une certaine fonction S. Cette fonction S est appelée somme de la série de fonctions et notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.*

Théorème 3

On a équivalence entre :

(i). la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $A \subset D$,

(ii). pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.

De plus, si tel est le cas, on a :

$$\forall x \in A, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Proposition 4

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $A \subset D$, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur A.

Définition 5

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $A \subset D$, alors on peut introduire son reste de rang n, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$, défini par $R_n : x \in A \longmapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Proposition 6

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $A \subset D$, alors sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S = S_n + R_n$ et la suite de fonctions $(R_n)_n$ des restes converge simplement sur A vers la fonction nulle.

Définition 7

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ ***converge absolument simplement*** *sur $A \subset D$ si la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge simplement sur A, autrement dit, si pour tout $x \in A$, la série numérique $\sum |f_n(x)|$ converge.*

Proposition 8

Si la série de fonctions $\sum f_n$ *converge absolument simplement sur* $A \subset D$*, alors elle converge simplement sur* A*.*

Définition 9

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ *converge uniformément sur* $A \subset D$ *si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de ses sommes partielles (où* $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$*) converge uniformément sur* A*.*

Proposition 10

Si la série de fonctions $\sum f_n$ *converge uniformément sur* $A \subset D$*, alors elle converge simplement sur* A*.*

Proposition 11

Si la série de fonctions $\sum f_n$ *converge uniformément sur* $A \subset D$*, alors la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* A *vers la fonction nulle.*

Proposition 12

On a équivalence entre :

(i). *la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* $A \subset D$*,*

(ii). *la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement sur* A *et la suite de fonctions* $(R_n)_n$ *de ses restes (où* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$*) converge uniformément vers la fonction nulle sur* A*.*

Proposition 13 (*Critère de Cauchy uniforme*)

La série de fonctions $\sum f_n$ *converge uniformément sur* $A \subset D$ *si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in A, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad \left(p > q \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=q+1}^{p} f_k(x) \right| \leq \varepsilon \right).$$

Définition 14

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ ***converge normalement*** *sur* $A \subset D$ *si pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, la fonction* f_n *est bornée sur* A *et la série numérique* $\sum \|f_n\|_{\infty,A}$ *converge, où* $\|f_n\|_{\infty,A} = \sup_{x\in A} |f_n(x)|$*.*

Théorème 15 (*CVN* $\Rightarrow$ *CVU*)

Si la série de fonctions $\sum f_n$ *converge normalement sur* $A \subset D$*, alors celle-ci converge uniformément sur* A*. De plus, elle converge absolument simplement sur* A*.*

Théorème 16

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* D *vers* $\mathbb{K}$ *et* $A \subset D$*. Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* f_n *est continue sur* A *et si la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* A*, alors la fonction somme* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue sur* A*.*

Corollaire 17

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur un intervalle $I \subset D$ et si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Théorème 18

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$ et $A \subset D$. Soit a un point adhérent à A (ou $a = +\infty$ si A n'est pas majoré, ou $a = -\infty$ si A n'est pas minoré). On suppose que

(i). pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite finie en a, notée l_n,

(ii). la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A,

alors la série numérique $\sum l_n$ converge, la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite finie en a, et $S(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$. Autrement dit,

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Théorème 19

Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $\sum f_n$ une série de fonctions de $[a;b]$ vers $\mathbb{K}$. On suppose que :

(i). pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a;b]$,

(ii). la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a;b]$,

alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a;b]$ et la série numérique $\sum \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge vers $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Autrement dit,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x.$$

Théorème 20

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que

(i). pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

(ii). la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement en un point $a \in I$,

(iii). la série de fonctions des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Théorème 21

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\sum f_n$ une série de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que

- (i). *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I,*
- (ii). *pour tout $k \in [\![0; p-1]\!]$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I,*
- (iii). *la série de fonctions $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I,*

alors la fonction $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et

$$\forall k \in [\![0; p]\!], \quad S^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}.$$