$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E, F, G sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimensions finies non nulles (on notera généralement $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$), U désigne un ouvert de E et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Définition 1

Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $a \in U$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a s'il existe une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ et une fonction ε définie au voisinage de 0_E telle que

$$f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon(h) \qquad \text{avec } \varepsilon(h) \underset{h\to 0_E}{\longrightarrow} 0_F.$$

On notera ceci : $f(a+h) = f(a) + u(h) + o(\|h\|)$ lorsque $h \to 0_E$.

Proposition 2

Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $a \in E$. Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, il y a unicité de l'application linéaire u décrivant le développement limité.

Définition 3

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$. On dit que f est ***différentiable*** *en $a \in U$ s'il existe une application linéaire $u : E \longrightarrow F$ telle que :*

$$\lim_{h \overset{\neq}{\to} 0_E} \frac{\|f(a+h) - f(a) - u(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$

Proposition 4

Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $a \in U$. On a équivalence entre :

(i). *f est différentiable en a,*

(ii). *f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.*

Proposition 5

Si f est différentiable en a, l'application linéaire u est unique. On la note $\mathrm{d}f(a)$, appelée différentielle de f en a. Par définition, $\mathrm{d}f(a)$ appartient à $\mathcal{L}(E, F)$. Ainsi,

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(h) + o(\|h\|) \qquad \text{quand } h \longrightarrow 0_E.$$

Théorème 6

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$. Si f est différentiable en $a \in U$, alors f est continue en a.

Proposition 7

Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow F$. On a équivalence entre :

(i). *f est différentiable en a,*

(ii). *f est dérivable en a.*

Dans ce cas, on a alors

$$\mathrm{d}f(a) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & F \\ h & \longmapsto & hf'(a) \end{array} \qquad \text{et} \qquad f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1)$$

où l'on rappelle que $f'(a) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}(f(a+t) - f(a))$.

Définition 8

Une fonction $f : U \subset E \longrightarrow F$ est dite **différentiable** *(sur U) si elle est différentiable en tout point a de U. L'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f : & U & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,F) \\ & a & \longmapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

est alors appelée différentielle de f.

Théorème 9

Les fonctions différentiables sont continues.

Proposition 10

Si $f : E \longrightarrow F$ est constante, alors f est différentiable et sa différentielle est l'application nulle : pour tout $a \in E$, $\mathrm{d}f(a) = \widetilde{0}$ où $\widetilde{0}$ désigne $0_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Proposition 11

Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire, alors f est différentiable et sa différentielle est constante :

$$\forall a \in E, \quad \mathrm{d}f(a) = f.$$

Proposition 12

Soient I un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ et $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow F$. On a l'équivalence :

f est différentiable si, et seulement si, f est dérivable.

Proposition 13

Si $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ est une application bilinéaire, alors φ est différentiable, et on a

$$\forall (x,y) \in E \times F, \, \mathrm{d}\varphi(x,y) : \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & G \\ (h,k) & \longmapsto & \varphi(x,k) + \varphi(h,y). \end{array}$$

Proposition 14

Soient $f, g : U \subset E \longrightarrow F$. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si f et g sont différentiables, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi et

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda \, \mathrm{d}f + \mu \, \mathrm{d}g.$$

Proposition 15

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et $f : U \subset E \longrightarrow F$ de fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_p$ dans la base $\mathcal{B}$. On a équivalence entre :

(i). *f est différentiable,*

(ii). *les fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_p$ de f sont différentiables.*

Dans ce cas, on a

$$\forall a \in U, \quad \forall h \in E, \quad \mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{d}f_i(a)(h) e_i.$$

Proposition 16

Soient $F_1, \dots, F_p$ des espaces vectoriels normés de dimensions finies (non nulles). On note $F = \prod_{i=1}^{p} F_i$.
Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$. On peut écrire $f = (f_1, \dots, f_p)$ avec $f_i : U \subset E \longrightarrow F_i$ les fonctions composantes de f. On a équivalence entre :

(i). *f est différentiable,*

(ii). *pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, f_i est différentiable.*

Dans ce cas, pour tout $a \in U$, $\mathrm{d}f(a) = (\mathrm{d}f_1(a), \dots, \mathrm{d}f_p(a))$.

Théorème 17 (*Différentiation de fonctions composées*)

Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$, V un ouvert de F tel que $f(U) \subset V$ et $g : V \subset F \longrightarrow G$. Si f est différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $f(a) \in V$, la fonction composée $g \circ f : U \subset E \longrightarrow G$ est différentiable en a et

$$\forall h \in E, \quad \mathrm{d}(g \circ f)(a)(h) = \mathrm{d}g(f(a))\Big(\mathrm{d}f(a)(h)\Big).$$

Par suite, si f et g sont différentiables (resp. sur U et V), $g \circ f$ est aussi différentiable et

$$\forall a \in U, \quad \mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a).$$

Proposition 18

Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$, $\lambda : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction scalaire et $a \in U$. Si f et λ sont différentiables en a, il en est de même de la fonction λf et on a

$$\forall h \in E, \quad \mathrm{d}(\lambda f)(a)(h) = \lambda(a)\,\mathrm{d}f(a)(h) + \mathrm{d}\lambda(a)(h) f(a) \quad \textit{i.e.} \quad \mathrm{d}(\lambda f)(a) = \mathrm{d}\lambda(a) f(a) + \lambda(a)\,\mathrm{d}f(a).$$

Définition 19

Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$, $a \in U$ et $v \in E$. On dit que f est ***dérivable selon le vecteur*** *v en a (ou admet une dérivée directionnelle suivant v en a) si la fonction d'une variable réelle $\varphi : t \longmapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0.*
On appelle alors dérivée selon le vecteur v de f en a la valeur de cette dérivée, notée

$$D_v f(a) = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a + tv) - f(a)).$$

Théorème 20

Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f est dérivable en a selon tout vecteur $v \in E$ et on a

$$D_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v).$$

Définition 21

Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $i \in [\![1;n]\!]$. On dit que f admet une i-ième dérivée partielle (dans la base $\mathcal{B}$) en $a \in U$ si elle admet une dérivée directionnelle selon le vecteur e_i en a. On note alors

$$\partial_i f(a) = D_{e_i}(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ \neq}} \frac{1}{t}(f(a + te_i) - f(a)).$$

Définition 22

Sous réserve d'existence, l'application $\partial_i f : U \subset E \longrightarrow F$ est appellée i-ième dérivée partielle de f (dans la base $\mathcal{B}$).

Théorème 23

Si $f : U \subset E \longrightarrow F$ est différentiable, alors les dérivées partielles de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ existent et pour tout $a \in U$, on a :

$$\partial_i f(a) = \mathrm{d}f(a)(e_i).$$

De plus, pour tout $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \in E$ (avec $(h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$),

$$\mathrm{d}f(a)(h) = D_h f(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a).$$

Corollaire 24

Si $f : U \subset E \longrightarrow F$ est différentiable en $a \in U$, le développement limité à l'ordre 1 de f en a s'écrit

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a) + o(\|h\|) \quad \text{quand} \quad h \longrightarrow 0_E.$$

Proposition 25

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow F$, $a \in U$ et $i \in [\![1;n]\!]$. On a équivalence entre :

(i). *f admet une i-ième dérivée partielle en a (dans la base canonique),*

(ii). *la i-ième application partielle de f au point a, notée $f_{a,i}$, est dérivable en a_i.*

Dans ce cas, on a

$$\partial_i f(a) = f'_{a,1}(a_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n))|_{t=a_i}.$$

Proposition 26

Avec les notations précédentes, pour $a \in U$ et $i \in [\![1;n]\!]$, on a équivalence entre :

(i). *f admet une i-ième dérivée partielle dans la base $\mathcal{B}$ en a,*

(ii). *$\widetilde{f}$ admet une i-ième dérivée partielle en $(a_1, \ldots, a_n)$ (dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$).*

Dans ce cas, on a

$$\partial_i f(a) = \partial_i \widetilde{f}(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\widetilde{f}(a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_n))|_{t=a_i}$$

(où $a = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$).

Proposition 27

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$, $a \in U$ et $i \in [\![1;n]\!]$. On a équivalence entre :

(i). *f admet une i-ième dérivée partielle en a dans la base $\mathcal{B}$ de E,* (*ii*). *les fonctions coordonnées de f dans une base de F admettent une i-ième dérivée partielle en a dans la base $\mathcal{B}$.*

Dans ce cas, on a

$$\forall k \in [\![1;p]\!], \quad (\partial_i f)_k = \partial_i(f_k)$$

où l'on a noté f_k et $(\partial_i f)_k$ les fonctions coordonnées de f et $\partial_i f$ dans une base donnée de F.

Définition 28

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ une base de F. Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$ différentiable en $a \in U$. On appelle **matrice Jacobienne** *de f en a la matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ relatives aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$:*

$$\mathrm{Jac}_f(a) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\,\mathrm{d}f(a)) \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Théorème 29

Avec les mêmes notations, notons $f_1, \ldots, f_p$ les fonctions coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}'$, alors

$$\mathrm{Jac}_f(a) = (\partial_j f_i(a))_{i\in[\![1;p]\!],j\in[\![1;n]\!]} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_p(a) & \cdots & \partial_n f_p(a) \end{pmatrix}.$$

Proposition 30 (***Version matricielle du théorème de différentiation d'une composée***)

Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$, $g : V \subset F \longrightarrow G$ où V est un ouvert de F vérifiant $f(U) \subset V$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$\mathrm{Jac}_{g\circ f}(a) = \mathrm{Jac}_g(f(a)) \times \mathrm{Jac}_f(a)$$

(où les matrices Jacobiennes ont été prises dans des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$ respectives de E, F et G).

Proposition 31 (***Formule de dérivation en chaîne***)

Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$, $g : V \subset F \longrightarrow G$ où V est un ouvert de F tel que $f(U) \subset V$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors les dérivées partielles de $g \circ f$ en a dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E existent et sont données par

$$\partial_i(g \circ f)(a) = \sum_{k=1}^{p} \partial_i f_k(a) \partial_k g(f(a)) \quad \forall i \in [\![1;n]\!]$$

où l'on a noté $f_1, \ldots, f_p$ les fonctions coordonnées de f dans une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_p)$ de F.

Théorème 32

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$. On a équivalence entre :

(*i*). *f est différentiable et $\mathrm{d}f$ est continue (sur U) ,*

(*ii*). *les dérivées partielles de f dans une base de E existent et sont continues (sur U).*

Définition 33

On dit qu'une fonction $f : U \subset E \longrightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (sur U) si ses dérivées partielles dans une base de E existent et sont continues (sur U).

Proposition 34

Les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont différentiables donc continues.

Définition 35

Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $\mathcal{B}$ une base de E.
La fonction f est appelée dérivée partielle d'ordre 0 de f.
Pour $k \in \mathbb{N}$, et sous réserve d'existence, on appelle dérivées partielles d'ordre $k+1$ de f les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre k de f (dans la base $\mathcal{B}$).

Définition 36

Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction $f : U \subset E \longrightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (sur U) si ses dérivées partielles d'ordre k dans une base de E existent et sont continues (sur U).
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Théorème 37 (*Théorème de Schwarz*)

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$,

$$\partial_i(\partial_j f) = \partial_j(\partial_i f)$$

où les dérivées partielles de f sont calculées relativement à une base de E.