Théorème 1 (***Continuité sur un segment***)

Soit $f : I \times [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} F: & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est définie et continue sur I.

Théorème 2 (***Dérivation sur un segment***)

Soit $f : I \times [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que

(i). *f est continue sur $I \times [a;b]$,*

(ii). *f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, et que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times [a;b]$,*

alors la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 3

Soient $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et $u, v : I \longrightarrow J$ continues. Alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est définie et continue sur I.

Théorème 4

Soient $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, admettant une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $I \times J$ et $u, v : I \longrightarrow J$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t + v'(x)f(x,v(x)) - u'(x)f(x,u(x)).$$

Théorème 5 (***Continuité par domination***)

Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que :

(i). *f est continue sur $I \times J$,*

(ii). *il existe $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J vérifiant*

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t) \qquad \textit{(hypothèse de domination)}$$

alors la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

Théorème 6 (*Dérivabilité par domination*)

Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que :

(i). la fonction f est continue sur $I \times J$,

(ii). il existe une fonction $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

(iii). la fonction f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ qui est continue sur $I \times J$,

(iv). il existe une fonction $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t)$$

alors la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. De plus,

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Lemme 7

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

Définition 8

Pour tout $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$. La fonction $\Gamma :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ est appelée fonction Gamma d'Euler.

Lemme 9

La fonction Γ d'Euler vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Lemme 10

La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x > 0, \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$