

Définition 1

On appelle suite de fonctions de D vers \mathbb{K} toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou $(f_n)_{n \geq n_0}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$) vérifiant pour tout n , $f_n : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$.

Définition 2

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge simplement** sur $A \subset D$ vers $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ si pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$, c'est-à-dire

$$\forall x \in A, \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall x \in A, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

Définition 3

Si $(f_n)_n$ converge simplement sur A vers f , on dit que f est la **limite simple** sur A de la suite (f_n) .

Proposition 4

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles convergeant simplement vers f sur $A \subset D$.

1. Si f_n est positive sur A pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est positive sur A .
2. Si f_n est croissante sur A pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est croissante sur A .
3. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est convexe sur un intervalle $I \subset A$, alors f est convexe sur I .

Définition 5

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D vers \mathbb{K} . On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge uniformément** sur $A \subset D$ vers $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

Théorème 6

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de D vers \mathbb{K} , $A \subset D$ et $f : A \rightarrow \mathbb{K}$. On a équivalence entre :

1. $(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers f ,
2. il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_0$, la fonction $f_n - f$ est bornée, et

$$\|f_n - f\|_{\infty, A} = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \geq N_0]{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Théorème 7 (Convergence uniforme implique convergence simple)

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de D vers \mathbb{K} et $A \subset D$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ sur A , alors elle converge simplement vers f sur A .

Proposition 8 (Critère de Cauchy uniforme)

Une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de D vers \mathbb{K} converge uniformément sur $A \subset D$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in A, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad (p \geq q \geq N \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon)$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad (p \geq q \geq N \Rightarrow f_p - f_q \text{ est bornée et } \|f_p - f_q\|_{\infty, A} \leq \varepsilon).$$

Proposition 9

Si pour tout n , f_n est bornée sur A , et la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A , alors f est bornée sur A .

Théorème 10

Soit $a \in A$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ sur A , et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a , alors f est continue en a .

Corollaire 11

Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A , et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur A , alors f est continue sur A .

Théorème 12 (Théorème de la double limite)

Soit a un point adhérent à A (ou $a = +\infty$ si A n'est pas majoré, $a = -\infty$ si A n'est pas minoré).

1. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ sur A ,
2. s'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, la fonction f_n admet une limite finie en a , notée ℓ_n , alors la suite numérique $(\ell_n)_{n \geq N_0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, la fonction f a une limite en a , et ces deux limites sont égales :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right).$$

Théorème 13

Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a; b]$ vers \mathbb{K} . Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a; b]$ vers $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$, alors la fonction limite f est continue sur $[a; b]$ et la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$. Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Définition 14

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $(a_i)_{i \in \llbracket 0; p \rrbracket}$ de $[a; b]$ (c'est-à-dire une suite finie $(a_i)_{i \in \llbracket 0; p \rrbracket}$ telle que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_i < \dots < a_p = b$) telle que, pour tout $i \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ admet un prolongement continu sur $[a_i; a_{i+1}]$.

Théorème 15

Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $[a; b]$ vers \mathbb{K} . Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $[a; b]$ et si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur

$[a; b]$ vers une fonction f **continue par morceaux**, alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$.

Définition 16

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. La fonction f est dite continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur tout segment de I .

Théorème 17 (Théorème de convergence dominée (admis))

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers \mathbb{K} .

- (i). Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I ,
- (ii). si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux,
- (iii). s'il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x) \quad (\text{hypothèse de domination})$$

alors les fonctions f_n et f sont (absolument) intégrables sur I et

$$\int_I f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f(x) dx.$$

Lemme 18

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de I vers \mathbb{K} et $a \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n la primitive de f_n sur I s'annulant en a ,

$$\text{i.e. } F_n : x \in I \mapsto \int_a^x f_n(t) dt.$$

Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f , alors la suite de fonctions $(F_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers

$$F : x \in I \mapsto \int_a^x f(t) dt.$$

Théorème 19

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers \mathbb{K} . On suppose que

- (i). pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I ,
 - (ii). la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement en un point $a \in I$,
 - (iii). la suite de fonctions $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g ,
- alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur I et de dérivée $f' = g$.

Corollaire 20

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers \mathbb{K} . On suppose que

(i). pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I ,

(ii). la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers $f : I \rightarrow \mathbb{K}$,

(iii). la suite de fonctions $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $g : I \rightarrow \mathbb{K}$,

alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers f , f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f' = g$.

Théorème 21

Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers \mathbb{K} et $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

(i). pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe \mathcal{C}^p sur I ,

(ii). pour tout $k \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$, la suite de fonctions $(f_n^{(k)})_n$ converge simplement sur I vers une fonction g_k ,

(iii). la suite de fonctions $(f_n^{(p)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_p ,

alors la limite simple $f = g_0$ de $(f_n)_n$ sur I est de classe \mathcal{C}^p et pour tout $k \in \llbracket 0; p \rrbracket$, $f^{(k)} = g_k$ (limite simple de la suite $(f_n^{(k)})_n$).