

Définition 1

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est **périodique** s'il existe un réel T strictement positif tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t+T) = f(t).$$

On appelle alors T une période de f et on dit que f est T -périodique.

Proposition 2

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $g : [a; a+T[\rightarrow \mathbb{C}$. Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -périodique dont la restriction à $[a; a+T[$ est égale à g , i.e. $f|_{[a; a+T[} = g$.

Proposition 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction T -périodique et $a \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre :

- (i). f est continue,
- (ii). la restriction de f au segment $[a; a+T]$, notée $f|_{[a; a+T]}$, est continue.

Définition 4

Soit $k \in \mathbb{N}$. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -périodique est dite **continue par morceaux** (resp. de classe \mathcal{C}^k par morceaux) si sa restriction au segment $[0; T]$ est continue par morceaux (resp. \mathcal{C}^k par morceaux), c'est-à-dire s'il existe une subdivision (a_0, \dots, a_n) de $[0; T]$ telle que pour tout $j \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, la restriction de f à $]a_j; a_{j+1}[$, notée $f|_{]a_j; a_{j+1}[}$, admette un prolongement continu (resp. de classe \mathcal{C}^k) au segment $[a_j; a_{j+1}]$.

Proposition 5

Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $g : [a; a+T] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^k par morceaux sur $[a; a+T]$, il existe une unique fonction f qui soit T -périodique, de classe \mathcal{C}^k par morceaux et coïncidant avec la fonction g sur $[a; a+T]$.

Proposition 6

Toute fonction périodique continue par morceaux est bornée.

Proposition 7

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction T -périodique continue par morceaux. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Définition 8

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions 2π -périodiques et continues par morceaux. On pose

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Proposition 9

L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{CM}_{2\pi} \times \mathcal{CM}_{2\pi} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\longmapsto \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

est une forme sesquilinéaire (i.e. linéaire à droite et semi-linéaire à gauche) hermitienne positive sur $\mathcal{CM}_{2\pi}$.

Proposition 10

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{C}_{2\pi}$. Ainsi, $\mathcal{C}_{2\pi}$ est un espace préhilbertien complexe.

Définition 11

Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, on note

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}.$$

Proposition 12

Pour tous $f, g \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, on a :

- (i). Homogénéité : pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$,
- (ii). Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$,
- (iii). Inégalité triangulaire : $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on considère les trois fonctions suivantes appartenant à $\mathcal{C}_{2\pi}$:

$$e_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad C_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{et} \quad T_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$t \longmapsto e^{int} \quad t \longmapsto \cos(nt) \quad t \longmapsto \sin(nt)$$

Proposition 13

La famille de fonctions $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{C}_{2\pi}$. La famille $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{T_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille orthogonale de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Définition 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n = \text{Vect}\{e_k \mid k \in \llbracket -n; n \rrbracket\}$ et $\mathcal{P} = \text{Vect}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$. Les éléments de \mathcal{P} , qui correspondent à des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, sont appelés **polynômes trigonométriques**.

Proposition 15

Soit $P \in \mathcal{P}$ un polynôme trigonométrique. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$P = \sum_{n=-p}^p c_n e_n \quad \text{avec} \quad c_n = \langle e_n, P \rangle$$

ce qui équivaut à $P = \frac{a_0}{2} e_0 + \sum_{n=1}^p (a_n C_n + b_n T_n)$ où $a_n = c_n + c_{-n} = 2\langle C_n, P \rangle$ et $b_n = i(c_n - c_{-n}) = 2\langle T_n, P \rangle$. On a de plus,

$$\|P\|_2^2 = \sum_{n=-p}^p |c_n|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^p (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Définition 16

On appelle **série trigonométrique** toute série de fonctions $\sum u_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est combinaison linéaire de e_n et e_{-n} . En d'autres termes, il existe $c_0 \in \mathbb{C}$ tel que $u_0 = c_0 e_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe c_n et $c_{-n} \in \mathbb{C}$ tels que $u_n = c_n e_n + c_{-n} e_{-n}$.

Proposition 17

Les sommes partielles d'une série trigonométrique sont des polynômes trigonométriques.

Définition 18

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et continue par morceaux. On définit ses **coefficients de Fourier exponentiels** par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \langle e_n, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

et ses **coefficients de Fourier trigonométriques** par

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) &= 2 \langle C_n, f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ b_n(f) &= 2 \langle T_n, f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt. \end{aligned}$$

Théorème 19

Si une série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} , alors sa fonction somme définie par

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{int} = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n e^{int} + \alpha_{-n} e^{-int}) \end{aligned}$$

est continue sur \mathbb{R} , 2π -périodique et ses coefficients de Fourier exponentiels sont égaux à ses coefficients, i.e. pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha_n = c_n(S)$.

Proposition 20

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} a_n(f) &= c_n(f) + c_{-n}(f), & b_n(f) &= i(c_n(f) - c_{-n}(f)), \\ c_n(f) &= \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} & \text{et} & \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}. \end{aligned}$$

Proposition 21

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$.

- (i). Si f est à valeurs réelles, alors ses coefficients de Fourier trigonométriques sont réels, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) \in \mathbb{R}$ et $b_n(f) \in \mathbb{R}$.
- (ii). Si f est paire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$.
- (iii). Si f est impaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$.

Proposition 22

Soient $f, g \in \mathcal{CM}_{2\pi}$.

- (i). Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$.
- (ii). Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\bar{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$ où \bar{f} désigne la fonction conjuguée de f .
- (iii). Pour tout $a \in \mathbb{R}$, si l'on note $f_a : t \mapsto f(t + a)$ la fonction translatée, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f_a) = e^{ina} c_n(f)$.

Définition 23

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et continue par morceaux. On appelle **série de Fourier** de f la série trigonométrique $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$. On appelle **somme de Fourier** de f la fonction somme de la série de Fourier de f :

$$S(f) : t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt))$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n(f)$ la somme partielle de rang n de la série de Fourier de f à savoir

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k = \frac{a_0(f)}{2} e_0 + \sum_{k=1}^n (a_k(f) C_k + b_k(f) T_k).$$

Proposition 24

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et 2π -périodique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme partielle de rang n de la série de Fourier de f , notée $S_n(f)$, est le projeté orthogonal de f sur \mathcal{P}_n et on a

$$\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2 \quad \text{et} \quad \|f - S_n(f)\|_2 = d(f, \mathcal{P}_n).$$

Proposition 25

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$ la somme partielle de rang n de la série de Fourier de f . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f - S_n(f)$ est orthogonal au sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_n = \text{Vect}\{e_k \mid k \in \llbracket -n; n \rrbracket\}$ c'est-à-dire que pour tout $P \in \mathcal{P}_n$, $\langle f - S_n(f), P \rangle = 0$. En particulier, $\langle f - S_n(f), S_n(f) \rangle = 0$.

Corollaire 26 (Inégalité de Bessel)

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n(f)$ la somme partielle de rang n de la série de Fourier de f . Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|S_n(f)\|_2 \leq \|f\|_2$$

ce qui équivaut à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

De plus, la série bilatère $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ et la série numérique $\sum (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$ convergent et l'on

a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) \leq \|f\|_2^2.$$

Corollaire 27

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, alors on a :

$$c_n(f) \xrightarrow{|n| \rightarrow +\infty} 0, \quad a_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad b_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Proposition 28

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et de classe \mathcal{C}^k . Les coefficients de Fourier de f vérifient

$$c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

et par conséquent

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{quand} \quad |n| \rightarrow +\infty.$$

Définition 29

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On dit que f est **développable en série de Fourier** si sa série de Fourier converge simplement sur \mathbb{R} vers f , c'est-à-dire si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t).$$

Dans ce cas, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt)).$$

Théorème 30 (Théorème de Dirichlet (admis))

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique. Si f est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge simplement sur \mathbb{R} vers la régularisée de f , notée $\tilde{f} : t \mapsto \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$, i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S(f)(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikt} = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

Théorème 31 (Théorème de convergence normale)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique, de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Si de plus f est continue sur \mathbb{R} , alors la série de Fourier de f converge normalement sur \mathbb{R} et sa somme est f .

Théorème 32

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -périodique et continue par morceaux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P_ε tel que $\|f - P_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon$.

Théorème 33 (Théorème de Parseval)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et continue par morceaux. La suite des sommes partielles $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ de la série de Fourier de f vérifie

$$\|S_n(f) - f\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

De plus, on a l'égalité de Parseval-Bessel :

$$\|f\|_2^2 = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|S_p(f)\|_2^2$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2).$$