

Définition 1

On appelle **norme** sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- (i). axiome de séparation : $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0_E$
- (ii). homogénéité : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- (iii). inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

On dit alors que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé.

Proposition 2 (Inégalité triangulaire inversée)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors pour tous $x, y \in E$, on a

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|.$$

Définition 3

Un vecteur x d'un espace normé E est dit **unitaire** si $\|x\| = 1$.

Définition 4

Une **distance** sur E (ou sur un ensemble quelconque) est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- (i). symétrie : $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$
- (ii). séparation : $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (iii). inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Proposition 5

Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé, l'application

$$\begin{aligned} d : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\longmapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

définit une distance sur E .

Définition 6

Soient E un espace normé, $a \in E$ et $r > 0$. On définit :

- la **boule ouverte** de centre a et de rayon r par $B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$,
- la **boule fermée** de centre a et de rayon r par $\overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$,
- la **sphère** de centre a et de rayon r par $S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$.

Proposition 7

Une boule B (ouverte ou fermée) est une partie **convexe**, c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in B, \forall \theta \in [0, 1], (1 - \theta)x + \theta y \in B.$$

Une sphère (de rayon $r > 0$) n'est pas convexe.

Définition 8

Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in A, \|x\| \leq M.$$

Si A est une partie bornée non vide de E , on définit son **diamètre** par :

$$\text{diam}(A) := \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in A\}.$$

Proposition 9 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} |x_k|.$$

Proposition 10

Les applications $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ (norme euclidienne) et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur \mathbb{K}^n .

Proposition 11

Tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie peut être muni d'une norme.

Définition 12

Deux normes N_1 et N_2 sur un même espace E sont dites **équivalentes** si

$$\exists C_1, C_2 > 0, \quad \forall x \in E, \quad C_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq C_2 N_1(x).$$

Théorème 13 (Équivalence des normes en dimension finie (admis))

Sur un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, les normes sont deux à deux équivalentes.

Définition 14

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|u_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 15

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E est **convergente** s'il existe $\ell \in E$ tel que $\|u_n - \ell\| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ est alors unique, on l'appelle limite de la suite $(u_n)_n$ et on note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Proposition 16

Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ alors $\|u_n\| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \|\ell\|$. Par conséquent, toute suite convergente est bornée.

Proposition 17

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E convergeant respectivement vers ℓ et ℓ' . Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda u_n + \mu v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda \ell + \mu \ell' \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

En d'autres termes, l'ensemble des suites convergentes de E est un espace vectoriel, et l'application $(u_n)_n \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est linéaire.

Proposition 18

Soient $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique convergeant vers λ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers $\ell \in E$, alors

$$\lambda_n \cdot u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda \cdot \ell.$$

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Soit $u = (u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$u(n) = u_1(n)e_1 + \dots + u_p(n)e_p.$$

Les suites scalaires $u_k = (u_k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont appelées suites coordonnées (ou composantes) de la suite vectorielle u dans la base e .

Proposition 19

On a équivalence entre :

- (i). la suite u converge,
- (ii). les suites coordonnées u_1, \dots, u_p convergent.

De plus, si tel est le cas, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u(n) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_1(n) \right) e_1 + \dots + \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_p(n) \right) e_p$.

Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés, et $E = E_1 \times \dots \times E_p$. On peut munir E de la norme produit suivante : pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$ (avec $x_i \in E_i$)

$$N(x) = \max\{N_k(x_k) \mid k \in \llbracket 1; p \rrbracket\}.$$

Soit $u = (u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u(n) = (u_1(n), \dots, u_p(n))$. Les suites vectorielles $u_k = (u_k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont appelées suites coordonnées de la suite u .

Proposition 20

On a équivalence entre :

- (i). la suite $u = (u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge (pour N)
- (ii). les suites coordonnées (ou composantes) $u_k = (u_k(n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent (respectivement pour N_k).

Si tel est le cas, on a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(n) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_1(n), \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_p(n) \right).$$

Définition 21

On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Cette série est notée $\sum u_n$ et le terme S_n est appelé somme partielle de rang n de cette série.

Définition 22

On dit que la série $\sum u_n$ **converge** si la suite $(S_n)_n$ converge. Sa limite S est alors appelée somme de la série et est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On appelle reste de rang n la quantité $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n$.

Définition 23

Une série $\sum u_n$ d'éléments de E est dite **absolument convergente** si la série numérique à termes positifs $\sum \|u_n\|$ est convergente.

Théorème 24

Si E est de dimension finie, l'absolue convergence d'une série d'éléments de E entraîne sa convergence.

Définition 25

On appelle **voisinage** d'un élément $x \in E$ toute partie $V \subset E$ vérifiant :

$$\exists r > 0, \quad B(x, r) \subset V.$$

Définition 26

Une partie \mathcal{U} de E est dite **ouverte** si elle est voisinage de chacun de ses points, i.e.

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset \mathcal{U}.$$

On dit encore que \mathcal{U} est un ouvert de E .

Proposition 27

Une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

Proposition 28

Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.

Proposition 29

Si $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_p$ sont des ouverts des espaces normés E_1, \dots, E_p alors $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_p$ est un ouvert de l'espace normé produit $E = E_1 \times \dots \times E_p$.

Définition 30

Un élément $a \in E$ est dit **intérieur** à une partie $X \subset E$ si X est un voisinage de a , i.e.

$$\exists r > 0, \quad B(a, r) \subset X.$$

L'intérieur de X , noté X° , est l'ensemble de tous les points intérieurs à X , c'est-à-dire $X^\circ = \{x \in E \mid$

$\exists r > 0, B(x, r) \subset X$.

Proposition 31

Une partie $X \subset E$ est ouverte si et seulement si $X^\circ = X$.

Proposition 32

Soit X une partie de E , alors X° est la réunion des ouverts inclus dans X . Par conséquent, X° est le plus grand ouvert inclus dans X .

Définition 33

Une partie F de E est dite **fermée** si son complémentaire (dans E) est un ouvert. On dit aussi que F est un fermé de E .

Proposition 34

Une intersection (finie ou infinie) de fermés de E est un fermé de E .

Proposition 35

Une union **finie** de fermés de E est un fermé de E .

Proposition 36 (Caractérisation séquentielle des fermés)

Une partie F de E est fermée si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ appartient à F , ce qui s'écrit encore :

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \quad \Rightarrow \quad \ell \in F.$$

Proposition 37

Si F_1, \dots, F_p sont des fermés des espaces normés E_1, \dots, E_p alors $F = F_1 \times \dots \times F_p$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé produit $E = E_1 \times \dots \times E_p$ muni de la norme produit.

Définition 38

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On appelle **suite extraite** (ou sous-suite) de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Définition 39

Une partie K de E est dite **compacte** si toute suite d'éléments de K possède une sous-suite convergente dans K , i.e.

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}, \quad \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante, } \quad x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in K.$$

On dit aussi que K est un compact de E .

Proposition 40

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Théorème 41

Si E est un espace de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.

Corollaire 42 (*Généralisation du théorème de Bolzano-Weierstrass*)

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée admet une sous-suite convergente.