E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Définition 1

On appelle ***voisinage*** *d'un élément $x \in E$ toute partie $V \subset E$ vérifiant :*

$$\exists r > 0, \quad B(x, r) \subset V.$$

Définition 2

Une partie $\mathcal{U}$ de E est dite ***ouverte*** *si elle est voisinage de chacun de ses points, i.e.*

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset \mathcal{U}.$$

On dit encore que $\mathcal{U}$ est un ouvert de E.

Proposition 3

Une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

Proposition 4

Une intersection ***finie*** *d'ouverts est un ouvert.*

Proposition 5

Si $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_p$ sont des ouverts des espaces normés $(E_1, N_1), \ldots, (E_p, N_p)$ alors $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_p$ est un ouvert de l'espace normé produit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ muni de la norme produit.

Définition 6

Une partie F de E est dite ***fermée*** *si son complémentaire (dans E) est un ouvert. On dit aussi que F est un fermé de E.*

Proposition 7

Une intersection (finie ou infinie) de fermés de E est un fermé de E.

Proposition 8

Une union ***finie*** *de fermés de E est un fermé de E.*

Proposition 9 (*Caractérisation séquentielle des fermés*)

Une partie F de E est fermée si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ appartient à F, ce qui s'écrit encore :

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \Rightarrow \quad \ell \in F.$$

Proposition 10

Si $F_1, \ldots, F_p$ sont des fermés des espaces normés $E_1, \ldots, E_p$ alors $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé produit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ pour la norme produit.

Définition 11

Un élément $a \in E$ est dit ***intérieur*** *à une partie $X \subset E$ si X est un voisinage de a, i.e.*

$$\exists r > 0, \quad B(a, r) \subset X.$$

L'intérieur de X, noté $\mathring{X}$, est l'ensemble de tous les points intérieurs à X, c'est-à-dire $\mathring{X} = \{x \in E \mid \exists r > 0,\ B(x,r) \subset X\}$.

Proposition 12

Une partie $X \subset E$ est ouverte si et seulement si $\mathring{X} = X$.

Proposition 13

Soit X une partie de E, alors $\mathring{X}$ est la réunion de tous les ouverts inclus dans X. Par conséquent, $\mathring{X}$ est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans X.

Définition 14

On dit qu'un élément $a \in E$ est ***adhérent*** *à une partie $X \subset E$ si*

$$\forall r > 0, \quad B(a,r) \cap X \neq \emptyset.$$

On appelle ***adhérence*** *de X l'ensemble, noté $\overline{X}$, des éléments adhérents à X.*

Proposition 15

Soit X une partie de E, alors

$$E \backslash \overline{X} = \overbrace{(E \backslash X)}^{\circ} \quad \text{et} \quad E \backslash \mathring{X} = \overline{E \backslash X}.$$

Proposition 16

Une partie $X \subset E$ est fermée si et seulement si $\overline{X} = X$.

Proposition 17

Soit X une partie de E, alors $\overline{X}$ est l'intersection de tous les fermés contenant X. Par conséquent, $\overline{X}$ est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant X.

Proposition 18 (*Caractérisation séquentielle des points adhérents*)

Soient X une partie de E et $a \in E$. On a équivalence entre :

(i). *a est adhérent à X,*

(ii). *il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers a.*

Définition 19

On appelle ***frontière*** *d'une partie X de E l'ensemble $\mathrm{Fr}(X) = \overline{X} \backslash \mathring{X}$.*

Définition 20

Une partie X de E est dite ***dense*** *si $\overline{X} = E$.*

Proposition 21

Soit X une partie de E. On a équivalence entre :

(i). *X est une partie dense de E,*

(ii). $\forall a \in E, \quad \forall r > 0, \quad B(a,r) \cap X \neq \emptyset,$

(iii). $\forall a \in E, \quad \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \quad x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a.$

Définition 22

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On appelle ***suite extraite*** *(ou sous-suite) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.*

Théorème 23

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Si $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in E$, alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge aussi vers ℓ.

Définition 24

Une partie K de E est dite ***compacte*** *si toute suite d'éléments de K possède une sous-suite convergente dans K, i.e.*

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}, \quad \exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante }, \quad x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in K.$$

On dit aussi que K est un compact de E.

Proposition 25

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Théorème 26

Si E est un espace de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.

Corollaire 27 (*Généralisation du théorème de Bolzano-Weierstrass*)

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée admet une sous-suite convergente.