Définition 1

*Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou de $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$ pour $n_0 \in \mathbb{N}$) dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour une suite réelle ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ pour une suite complexe. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(u_n)_{n\geq n_0}$) la suite de terme général u_n.*

Définition 2

*Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie par :*

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

*On note cette série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ou $\sum u_n$. Pour $n \geq n_0$, le terme S_n est appelé la **somme partielle** de rang n de cette série.*

Définition 3

*La série numérique de terme général u_n est **convergente** lorsque la suite de ses sommes partielles $(S_n)_{n\geq n_0}$ converge, c'est-à-dire lorsqu'il existe $S \in \mathbb{K}$ tel que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k = S.$$

*Cette limite S est appelée la **somme** de la série et est notée :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = S.$$

En cas de convergence, on note pour tout $n \geq n_0$:

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

*le **reste** d'ordre n de la série.*

Définition 4

*Une série non convergente est dite **divergente**. La **nature** d'une série est sa convergence ou sa divergence.*

Proposition 5

Si la série $\sum u_n$ converge, la suite des restes $(R_n)_n$ converge vers 0.

Proposition 6

*Une **série téléscopique** est une série dont le terme général est de la forme $u_{n+1} - u_n$ pour une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Une série téléscopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, on a alors*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0.$$

Proposition 7 (***Condition nécessaire de convergence d'une série***)

Si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *converge, alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Définition 8

Si la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas vers* 0, *alors on dit que la série de terme général* u_n ***diverge grossièrement***.

Proposition 9 (***Opérations sur les séries***)

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ *et* $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ *deux séries numériques convergentes. Pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, *la série numérique* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda u_n + v_n)$ *converge.*