

Dans toute la suite,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux points. On note  $\alpha$  l'extrémité inférieure de  $I$ , à savoir  $\alpha = \inf I$  (avec la convention  $\inf I = -\infty$  si  $I$  n'est pas minoré), et  $\beta$  l'extrémité supérieure de  $I$ , à savoir  $\beta = \sup I$  (avec la convention  $\sup I = +\infty$  si  $I$  n'est pas majoré).

### Définition 1

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ . On définit  $\int_I f(t) dt \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  par

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \lim_{x \nearrow \beta} F(x) - \lim_{x \searrow \alpha} F(x) \stackrel{\text{notation}}{=} [F]_{\alpha}^{\beta}.$$

### Proposition 2

Pour  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue, on a

$$\int_I f(t) dt = \sup \left\{ \int_a^b f(t) dt \mid [a; b] \subset I \right\}.$$

### Définition 3

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue. On dit que la fonction  $f$  est **intégrable** sur  $I$  si l'intégrale  $\int_I f(t) dt$  est un réel positif fini, ce que l'on écrit aussi  $\int_I f(t) dt < +\infty$ .

### Théorème 4

Soient  $a > 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha}}$  est intégrable sur  $[a; +\infty[$  si et seulement si  $\alpha > 1$ .

### Théorème 5

Soient  $a > 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha}}$  est intégrable sur  $]0; a]$  si et seulement si  $\alpha < 1$ .

### Proposition 6

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}^+$ .

(a). Pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ ,  $\int_I (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_I f(t) dt + \mu \int_I g(t) dt$ .

(b). On a la relation de Chasles : pour tout  $\gamma \in I$ ,  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\gamma} f(t) dt + \int_{\gamma}^{\beta} f(t) dt$ .

(c). Si  $f \leq g$ , on a  $\int_I f(t) dt \leq \int_I g(t) dt$ .

(d). On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :  $\int_I f(t)g(t) dt \leq \sqrt{\int_I f(t)^2 dt} \sqrt{\int_I g(t)^2 dt}$ .

(e). Changement de variable : Si  $J$  est un intervalle d'extrémités  $a$  et  $b$  et  $\varphi : J \rightarrow I$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement croissante ( $\alpha = \lim_{u \rightarrow a} \varphi(u)$ ,  $\beta = \lim_{u \rightarrow b} \varphi(u)$ ), on a

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du$$

---

**Corollaire 7**

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continues.

- Si  $f \leq g$  et  $g$  est intégrable sur  $I$ , alors  $f$  est aussi intégrable sur  $I$ .
- Si  $f \leq g$  et  $f$  n'est pas intégrable sur  $I$ , alors  $g$  n'est pas intégrable sur  $I$ .

**Corollaire 8**

Soient  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue et  $J$  un intervalle inclus dans  $I$ .

- Si  $f$  est intégrable sur  $I$ , elle est aussi intégrable sur  $J$ .
- Si  $f$  n'est pas intégrable sur  $J$ , elle ne l'est pas non plus sur  $I$ .

**Définition 9**

Soit  $V \subset \mathbb{R}$  une partie de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $V$  est un voisinage de

- $a \in \mathbb{R}$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que l'une des trois parties  $]a - \varepsilon; a[ \cup ]a; a + \varepsilon[$ ,  $]a - \varepsilon; a[$  et  $]a; a + \varepsilon[$  est incluse dans  $V$ ,
- de  $+\infty$  s'il existe  $A > 0$  tel que  $]A; +\infty[ \subset V$ ,
- de  $-\infty$  s'il existe  $B < 0$  tel que  $] - \infty; B[ \subset V$ .

**Définition 10**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction. Soit  $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . On dit que  $f$  est définie au voisinage de  $a$  si son domaine de définition est un voisinage de  $a$ .

**Définition 11**

Soient  $J$  un intervalle (contenant au moins deux points) de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  un point adhérent à  $J$  (c'est-à-dire que  $a$  appartient à  $J$  ou est une extrémité, éventuellement infinie, de  $J$ ) et  $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). On dit que  $f$  est dominée par  $g$  au voisinage de  $a$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $a$  tel que

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in V, \quad |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

On note alors  $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow a}(g(x))$ .

**Définition 12**

Soient  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  un point adhérent à  $J$  et  $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). On dit que  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$  s'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur un voisinage  $V$  de  $a$  telle que

$$\forall x \in V, \quad f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors  $f(x) = \mathcal{o}_{x \rightarrow a}(g(x))$ .

**Définition 13**

Soient  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  un point adhérent à  $J$  et  $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). On dit que  $f$  est équivalente à  $g$  au voisinage de  $a$  s'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur un voisinage  $V$  de  $a$  telle que

$$\forall x \in V, \quad f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

On note alors  $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ .

**Proposition 14**

Soient  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  un point adhérent à  $J$  et  $f, g : J \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ).

- Si  $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ , alors  $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow a}(g(x))$ .
- Si  $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ , alors  $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow a}(g(x))$  et  $g(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow a}(f(x))$ .

**Théorème 15**

Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in ]a; +\infty[ \cup \{+\infty\}$  et  $f, g : [a; b[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  continues. Si  $f(x) = \mathcal{O}_{x \rightarrow b}(g(x))$  et si  $g$  est intégrable sur  $[a; b[$ , alors  $f$  est aussi intégrable sur  $[a; b[$ .

**Corollaire 16**

Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in ]a; +\infty[ \cup \{+\infty\}$  et  $f, g : [a; b[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  continues. Si  $f(x) = o_{x \rightarrow b}(g(x))$  et si  $g$  est intégrable sur  $[a; b[$ , alors  $f$  est aussi intégrable sur  $[a; b[$ .

**Corollaire 17**

Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in ]a; +\infty[ \cup \{+\infty\}$  et  $f, g : [a; b[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  continues. Si  $f(x) \sim_{x \rightarrow b} g(x)$ , alors  $f$  est intégrable sur  $[a; b[$  si et seulement si  $g$  l'est.

**Définition 18**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur l'intervalle  $I$ . On dit que  $f$  est **intégrable** sur  $I$  si  $\int_I |f(t)| dt < +\infty$  (autrement dit, si  $|f|$  est intégrable sur  $I$ ).

Dans ce cas, on définit  $\int_I f(t) dt = \int_I f^+(t) dt - \int_I f^-(t) dt$ .

**Définition 19**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  continue. On dit que  $f$  est **intégrable** sur  $I$  si  $\int_I |f(t)| dt < +\infty$ . On pose alors

$$\int_I f(t) dt = \int_I \operatorname{Re}(f)(t) dt + i \int_I \operatorname{Im}(f)(t) dt$$

**Proposition 20**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) continue, intégrable sur  $I$ . On a l'inégalité

$$\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt.$$

**Proposition 21**

(Linéarité de l'intégrale)

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) continues, intégrables sur  $I$ . Pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , la fonction  $\lambda f + \mu g$  est intégrable sur  $I$  et  $\int_I (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_I f(t) dt + \mu \int_I g(t) dt$ .

**Proposition 22**

(Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  continues. Si  $f^2$  et  $g^2$  sont intégrables sur  $I$ , alors  $fg$  est intégrable sur  $I$  et on a

$$\int_I |f(t)g(t)| dt \leq \sqrt{\int_I f(t)^2 dt} \sqrt{\int_I g(t)^2 dt}.$$

### Définition 23

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) continue. On dit que l'intégrale impropre  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$  **converge** si les primitives de  $f$  admettent des limites **finies** en  $\alpha$  et  $\beta$ . Si c'est le cas, on pose alors  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \lim_{x \nearrow \beta} F(x) - \lim_{x \searrow \alpha} F(x)$ , où  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

Sinon, on dit que l'intégrale impropre  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$  **diverge**.

### Proposition 24

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) continue. Si  $f$  est intégrable sur  $I$ , alors l'intégrale  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$  converge.

On dit que l'intégrale  $\int_I f(t) dt$  est **absolument convergente**.

### Définition 25

Une intégrale convergente mais non absolument convergente est dite **semi-convergente**.

### Proposition 26

Soient  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  continues. Si  $\int_I f(t) dt$  et  $\int_I g(t) dt$  convergent, alors pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , l'intégrale  $\int_I (\lambda f + \mu g)(t) dt$  converge et vérifie

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_I f(t) dt + \mu \int_I g(t) dt.$$

### Proposition 27

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

1. Relation de Chasles : Si  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$  converge et  $c \in ]\alpha; \beta[$ , alors les intégrales  $\int_{\alpha}^c f(t) dt$  et  $\int_c^{\beta} f(t) dt$  convergent et vérifient

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^c f(t) dt + \int_c^{\beta} f(t) dt.$$

2. Changement de variables : Soit  $\varphi : J \rightarrow I$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement croissante sur l'intervalle  $J$  d'extrémités  $a$  et  $b$ . Les intégrales impropres  $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$  et  $\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du$  sont de même nature et en cas de convergence, on a

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du.$$

**Théorème 28**

Soient  $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Si  $\int_{\alpha}^{\beta} u(t)v'(t) dt$  converge, et si la fonction  $uv$  admet des limites finies en  $\alpha$  et  $\beta$ , alors  $\int_{\alpha}^{\beta} u'(t)v(t) dt$  converge et

$$\int_{\alpha}^{\beta} u'(t)v(t) dt = [uv]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} u(t)v'(t) dt.$$

**Proposition 29**

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $b > 1$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$  est intégrable sur  $[b; +\infty[$  si et seulement si  $\alpha > 1$  ou ( $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ ).

**Proposition 30**

Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $0 < a < 1$ . La fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}}$  est intégrable sur  $]0; a]$  si et seulement si  $\alpha < 1$  ou ( $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ ).