Contrôle terminal - Lundi 11 juin 2012

durée : 2h

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés.

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2a(xy + xz + yz).$$

1. Donner la réduction de Gauss de q.
2. Discuter suivant les valeurs de a le noyau, le rang et la signature de q.

Exercice 2. Soit $\mathbb{R}[x]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Pour $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ on définit

$$(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

1. Justifier le fait qu'il s'agit d'un produit scalaire dans $\mathbb{R}[x]$.
2. Soit $\mathbb{R}_n[x]$ le sous-espace des polynômes de degré $\leq n$. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[x]$ par la procédure de Gram-Schmidt à partir de la base canonique $(1, x, x^2)$.
3. Donner une formule explicite pour la projection orthogonale de $\mathbb{R}[x]$ sur $\mathbb{R}_1[x]$. (Plus précisément, pour un polynôme $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ donner les coefficients a, b de sa projection orthogonale $q(x) = a + bx$ en fonction de $a_0, a_1, ..., a_n$.)

Exercice 3. On considère l'espace euclidien $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$(M \mid N) = \mathrm{tr}({}^tMN).$$

Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ la base canonique de E et $P = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : E &\to E \\ M &\mapsto PMP. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique.
2. Montrer que $(\mathrm{Ker}(f))^\perp = \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) = \{\lambda P,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
3. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Calculer ses valeurs propres.
4. Determiner la signature et le rang de la forme quadratique

$$\begin{aligned} q : E &\to \mathbb{R} \\ M &\mapsto (f(M) \mid M). \end{aligned}$$

Exercice 4. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est un automorphisme orthogonal.
2. Calculer la dimension de l'espace des invariants de $\mathbb{R}^3$ par u : $\{v \in \mathbb{R}^3,\ f(v) = v\}$ et en déduire la nature de f.
3. Écrire f comme produit de réflexions.