Université Claude Bernard, Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
Spécialité : Mathématiques
UE : Analyse 3 Automne 2012

Contrôle final - Analyse 3
15 janvier 2013

Avant propos.

La durée de l'examen est de 2h. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones portables est prohibé. La répartition en durée de chacun des exercices n'est donnée qu'à titre indicatif. La justification des réponses, ainsi qu'une présentation soignée, sont attendus et seront pris en compte dans la notation.

Questions de cours (20 minutes) (5 points)

1. (5 min, 2 points) Énoncer, sans le démontrer, le théorème des fonctions implicites pour des fonctions $f : U \subset \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}^q$ (où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^{p+q}$), en utilisant la notion de matrice jacobienne.
2. (15 min, 3 points)
   a. (10 min, 2 points) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $g : I \to \mathbb{R}^q$ une fonction $(n+1)$ fois dérivable. On note $g^{(k)}$ ses dérivées successives, $k \in \{1, ..., n+1\}$. Alors, pour tout $t \in I$, exprimer à l'aide de $g^{(n+1)}$ la valeur de
   $$\frac{d}{dt}\left(g(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t)^k}{k!} g^{(k)}(t)\right).$$
   b. (5 min, 1 point) Si l'on suppose en plus que g est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, et que I contient l'intervalle $[0, 1]$, en déduire la valeur de l'expression suivante :
   $$g(1) - g(0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0).$$

Exercice 1. (30 minutes) (4 points)

On considère les deux fonctions suivantes

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x-y)^2 + x^3 + y^3, \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x-y)^2 + x^4 + y^4. \end{array}$$

1. (5 min, 0.5 point) Montrer que f et g sont deux fois différentiables sur $\mathbb{R}^2$.
2. (5 min, 0.5 point) Déterminer les points critiques de f et g sur $\mathbb{R}^2$.
3. (5 min, 1 point) En utilisant des critères pour calculer les extrema d'une fonction sur un domaine, que peut-on en déduire sur la nature de ces points ?
4. (15 min, 2 points)
   i. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ la valeur de $f(x, x)$. Que peut en conclure sur la nature du point $(0, 0)$?

ii. Établir pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ une minoration de $g(x, y)$ par $g(0, 0)$. Que peut-on en conclure sur la nature du point $(0, 0)$?

iii. BONUS (+1 point) : Établir le résultat de la question $4.i.$ de façon rigoureuse en utilisant un développement de Taylor-Young de f à l'ordre 2.

Exercice 2. (30 minutes) (5 points)

Soient p une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que $p_0 = p(x_0, y_0)$ et $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x, y) = y - y_0 + \frac{1}{2}\big(p(x, y) + p_0\big)\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\Big).$$

1. (5 min, 1 point) Calculer $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$.
2. (5 min, 1 point) Montrer qu'au voisinage de (x_0, y_0), $F(x, y) = 0$ équivaut à $y = \varphi(x)$, où φ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
3. (5 min, 1 point) Exprimer alors φ' à l'aide de φ, de p et de ses dérivées partielles. (Appliquer la formule de différentiation des fonctions composées à la fonction $x \mapsto F(x, \varphi(x))$, qui est identiquement nulle.)
4. (5 min, 1 point) En déduire que $\varphi'(x_0) = \dfrac{p_0}{x_0^2}$.
5. (10 min, 1 point)

   i. (5 min, 0.5 point) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{p(x, \varphi(x)) - p_0}{x - x_0}$ à l'aide de φ' et des dérivées partielles de p.

   ii. (5 min, 0.5 point) À l'aide de la question 4, calculer cette limite pour la fonction p particulière définie par $p(x, y) = kxy$ avec $k > 0$.

Exercice 3. (40 minutes) (6 points)

1. (10 min, 2 points) Soient a, b, c, d des réels tels que $ad - bc \neq 0$. On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ par $\varphi(u, v) = (au + bv, cu + dv)$.

   a. (1 min, 0.5 point) Montrer que φ est différentiable.

   b. (4 min, 0.5 point) Calculer la matrice jacobienne de φ.

   c. (5 min, 1 point) Montrer que φ est un difféormorphisme sur $\mathbb{R}^2$, et donner l'expression de $\varphi^{-1}(x, y)$ quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. (15 min, 2 points) On considère une fonction f de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et on pose $g = f \circ \varphi$. Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$.
3. (15 min, 2 point) Montrer que f vérifie

   $$(E_1)\ \ a\frac{\partial f}{\partial x} + c\frac{\partial f}{\partial y} = f$$

   si et seulement si g vérifie

   $$(E_2)\ \ \frac{\partial g}{\partial u} = g.$$
4. BONUS (+1 point). Application. Trouver f solution de (E_1) lorsque $a = b = d = 1$ et $c = -1$.