Devoir de Mathématiques 5

samedi 28 janvier 2012

Durée : 4 heures

Remarques générales :

- Vérifiez que le sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.
- Vous êtes invité à apporter une attention particulière à la présentation et à la rédaction ; les copies peu lisibles ou mal présentées seront sanctionnées.
- Si au cours de l'épreuve vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

L'utilisation d'une calculatrice ou d'un téléphone portable est interdite.

Exercice 1. Sur les suites de réels.

1. **Questions de cours.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Donner à l'aide de quantificateurs la définition de :
   (a) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (b) $\lim a_n = a$ où $a \in \mathbb{R}$.
   (c) $\lim a_n = +\infty$.
2. **Questions de cours.** Soient $r \in \mathbb{R}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = r\, b_n.$$
   Aucune justification n'est demandée dans cette question.
   (a) Exprimer b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, r et b_0.
   (b) A quelles conditions nécessaires et suffisantes, la suite $(b_n)_n$ converge ? Préciser alors la limite.
   (c) Exprimer $\sum_{k=0}^{n} b_k$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$, r et b_0.
3. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $c_0 = 1$ et par la relation de récurrence pour tout $n \geq 0$:
   $$c_{n+1} = \frac{1}{c_n + n}$$
   (a) Justifier que pour tout $n > 0$, $c_n > 0$ et qu'ainsi $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (c) Montrer que $c_n \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 2. Points fixes d'une fonction croissante

Soit $f\ :\ [0,1] \to [0,1]$ une fonction **croissante**. On se propose de montrer que f possède au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

On suppose $f(0) \neq 0$, le cas où $f(0) = 0$ montrant qu'un tel x_0 existe.

On note $A = \{x \in [0,1]\ :\ f(x) > x\}$.

1. Rappeler les définition et caractérisation avec quantificateurs de la borne supérieure d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que A admet une borne supérieure. On pose $S = \sup(A)$.
3. On veut montrer que $f(S) = S$ à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.
   (a) Cas 1. On suppose que $f(S) > S$. Établir que $[S, f(S)[\subset A$. En déduire une contradiction.
   (b) Cas 2. On suppose que $f(S) < S$. Établir que $[f(S), S] \cap A = \emptyset$. En déduire une contradiction.
   (c) Conclure.
4. Le résultat reste-t-il valable si on suppose f **décroissante** ? Justifier.

Problème 1. Des sommes de coefficients binomiaux

Notations

- ⋆ L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$. Pour $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ avec $b \geq a$, $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $a \leq n \leq b$.
- ⋆ Étant donné un ensemble **fini** $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$, et $(x_k)_{k\in\mathcal{A}} \in \mathbb{C}^{\mathcal{A}}$ une famille de complexes indexée sur $\mathcal{A}$, la quantité $\displaystyle\sum_{k\in\mathcal{A}} x_k$ désigne la somme des éléments de la famille $(x_k)_{k\in\mathcal{A}}$.
- ⋆ Une somme $\displaystyle\sum_{k\in[\![a,b]\!]} x_k$ sera communément notée $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} x_k$.

Nota bene : les parties II et III utilisent les résultats de la partie I mais sont indépendantes entre elles.

Partie I. Questions de cours et d'application du cours

1. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geq k$. Donner la définition du coefficient binomial $\dbinom{n}{k}$ et rappeler ce que permet de dénombrer cette quantité.
2. Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq k \geq 1$. Démontrer l'égalité :
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$
3. **Énoncer** la formule du binôme de Newton.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes :
$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

Partie II. Les pairs et les impairs

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'objectif de cette partie est de calculer les sommes C_n et D_n suivantes :

$$C_n = \sum_{k=0,k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... \text{ (la somme est prise sur les entiers } k \in [\![0, n]\!] \text{ pairs);}$$

$$D_n = \sum_{k=0,k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + ... \text{ (la somme est prise sur les entiers } k \in [\![0, n]\!] \text{ impairs).}$$

5. Calculer C_2, D_2, C_3 et D_3.
6. Exprimer $C_n + D_n$ puis $C_n - D_n$ à l'aide de A_n et B_n.

7. En déduire une expression de C_n et de D_n en fonction de n.

Partie III. Les multiples de trois

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'objectif de cette partie est de calculer la somme E_n suivante :

$$E_n = \sum_{k=0,3|k}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + ... \text{ (la somme est prise sur les entiers } k \in [\![0,n]\!] \text{ multiples de 3).}$$

Pour $r \in \{0,1,2\}$, on définit le sous-ensemble $\mathcal{A}_{r,n}$ de $[\![0,n]\!]$ suivant :

$$\mathcal{A}_{r,n} = \{k \in [\![0,n]\!] \text{ tel que le reste de la division de } k \text{ par 3 égal } r\}\,.$$

Tous les entiers de $[\![0,n]\!]$ appartiennent à un et un seul $\mathcal{A}_{r,n}$ avec $r \in \{0,1,2\}$.

Nous avons donc $E_n = \displaystyle\sum_{k\in\mathcal{A}_{0,n}} \binom{n}{k}$. On définit alors :

$$F_n = \sum_{k\in\mathcal{A}_{1,n}} \binom{n}{k} \text{ et } G_n = \sum_{k\in\mathcal{A}_{2,n}} \binom{n}{k}.$$

8. On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
   (a) Rappeler les valeurs de j^3 et de $1 + j + j^2$.
   (b) Pour $r \in \{0,1,2\}$ et $k \in \mathcal{A}_{r,n}$ exprimer j^k et j^{2k} à l'aide de 1, j et j^2.
9. Exprimer $E_n + F_n + G_n$ en fonction de n.
10. Exprimer $(1+j)^n$ et $(1+j^2)^n$ à l'aide de E_n, F_n, G_n, j et j^2.
11. En déduire une expression de E_n en fonction de n.
12. Démontrer l'équivalent suivant :
$$E_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^n}{3}$$

Problème 2. La moyenne arithmético-géométrique d'après Gauss

Soient a et b des réels vérifiant $0 < a < b$.

On construit les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ par $a_0 = a$; $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \sqrt{a_n\, b_n} \\ b_{n+1} &= \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

Préliminaire

1. Montrer que a_n et b_n sont strictement positifs pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont bien définies.

Partie 1. Étude de convergence

L'**objectif de cette partie** est d'établir que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ **convergent vers une limite commune** notée $m(a,b)$ et appelée la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b.

2. Établir pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^*$ l'inégalité
$$\sqrt{x\,y} \leq \frac{x+y}{2}$$
avec égalité si et seulement si $x = y$.

3. Montrer que $a_n < b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que $(a_n)_n$ est strictement croissante et que $(b_n)_n$ est strictement décroissante.
5. On se propose dans cette question d'étudier la suite $(b_n - a_n)_n$
   (a) Montrer que $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(b_n - a_n)^2}{2\,(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|b_n - a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Etablir par récurrence que $|b_n - a_n| \leq \frac{1}{2^n}\,|b_0 - a_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la limite de $(b_n - a_n)_n$.
6. Conclure.

Partie 2. Vitesse de convergence

Dans cette partie, on veut estimer la vitesse de convergence des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ vers $m(a, b)$.

7. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites réelles. Rappeler les définitions de $u_n = O(v_n)$; $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$.
8. Montrer que $b_{n+1} - a_{n+1} = O\left((b_n - a_n)^2\right)$. En déduire que $b_{n+1} - a_{n+1} = o\,(b_n - a_n)$.
9. Montrer que $0 < m(a, b) - a_n < b_n - m(a, b)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. En déduire l'existence d'un réel $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq b_{n+1} - m(a, b) \leq C\,(b_n - m(a, b))^2.$$

11. Justifier l'existence d'un entier $n_0 \geq 0$ tel que $0 < b_{n_0} - m(a, b) < \frac{1}{10\,C}$.
12. Montrer qu'alors pour tout $n \geq n_0$

$$0 < b_n - m(a, b) \leq C^{2^{n-n_0}-1}\,\left(b_{n_0} - m(a, b)\right)^{2^{n-n_0}}.$$

On calcule les premières valeurs de la suite $(b_n)_n$ pour $a = 1$ et $b = \sqrt{2}$. On trouve les valeurs décimales approchées ci-dessous (On a effectué les calculs avec 50 chiffres après la virgule). On a mis en gras les décimales successives de b_i qui coincident avec celles de b_{i+1}.

b_1 = **1**.2071067811865475244008443621048490392848359376884
b_2 = **1.1981**569480946342955591721663326624772889040150761
b_3 = **1.1981402347**938772090828788690764074639904586267422
b_4 = **1.1981402347355922074**406313286331040863611447412997
b_5 = **1.198140234735592207439922492280323878227212**7680550
b_6 = **1.1981402347355922074399224922803238782272126632156**

13. Qu'observez-vous sur le nombre de décimales en gras successives ? Justifier votre observation à l'aide des résultats précédemment obtenus.

Fin de l'épreuve