

Fonctions de plusieurs variables réelles

Plan du chapitre

1 Un peu de topologie sur \mathbb{R}^n :

- Norme euclidienne
- Boules et sphères
- Parties ouvertes

2 Limites

- Cas des suites :
- Cas des fonctions :
 - Définitions et propriétés
 - Opérations sur les limites
 - Extension "à l'infini"

3 Continuité

- Définition et premiers exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- Applications partielles

Définition 1.1

On appelle **norme** sur \mathbb{R}^n toute application $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- ❶ *axiome de séparation* : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad N(x) = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$
- ❷ *homogénéité* : $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
- ❸ *inégalité triangulaire* : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Proposition 1.2 (Inégalité triangulaire inversée)

Soit $\| \cdot \|$ une norme sur \mathbb{R}^n . Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|.$$

Définition 1.3

On appelle **norme euclidienne** sur \mathbb{R}^n l'application $\| \cdot \|_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Proposition 1.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Proposition 1.5

L'application $\| \cdot \|_2$ est une norme sur \mathbb{R}^n .

Dans tout le reste du chapitre, la seule norme considérée sur \mathbb{R}^n sera la norme euclidienne. On se contentera donc de la noter $\| \cdot \|$ à la place de $\| \cdot \|_2$.

Définition 1.6

On appelle **distance euclidienne** sur \mathbb{R}^n l'application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) = \|x - y\|.$$

Proposition 1.7

La distance euclidienne $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifie :

- i) symétrie : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) = d(y, x)$
- ii) séparation : $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$
- iii) inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Proposition 1.8

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$

$$\max_{k \in [1; n]} |x_k| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{k \in [1; n]} |x_k|.$$

Plan du chapitre

1 Un peu de topologie sur \mathbb{R}^n :

- Norme euclidienne
- **Boules et sphères**
- Parties ouvertes

2 Limites

- Cas des suites :
- Cas des fonctions :
 - Définitions et propriétés
 - Opérations sur les limites
 - Extension "à l'infini"

3 Continuité

- Définition et premiers exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- Applications partielles

Définition 1.9

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On définit :

- la **boule ouverte** de centre a et de rayon r par
$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\},$$
- la **boule fermée** de centre a et de rayon r par
$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\},$$
- la **sphère** de centre a et de rayon r par
$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| = r\}.$$

Plan du chapitre

1 Un peu de topologie sur \mathbb{R}^n :

- Norme euclidienne
- Boules et sphères
- Parties ouvertes

2 Limites

- Cas des suites :
- Cas des fonctions :
 - Définitions et propriétés
 - Opérations sur les limites
 - Extension "à l'infini"

3 Continuité

- Définition et premiers exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- Applications partielles

Définition 1.10

On appelle **voisinage** d'un élément $x \in \mathbb{R}^n$ toute partie $V \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\exists r > 0, \quad B(x, r) \subset V.$$

Définition 1.11

Une partie \mathcal{U} de \mathbb{R}^n est dite **ouverte** si elle est voisinage de chacun de ses points, i.e.

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset \mathcal{U}.$$

On dit encore que \mathcal{U} est un ouvert de \mathbb{R}^n .

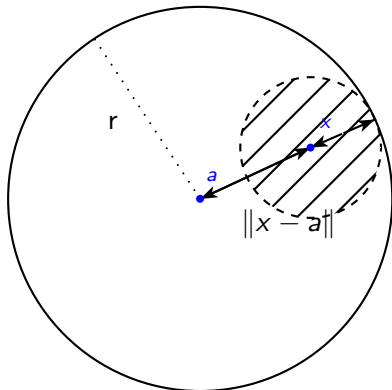


Figure – Une boule ouverte est ouverte

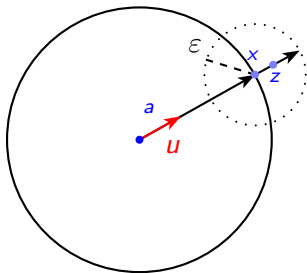


Figure – Une sphère n'est pas ouverte.

Proposition 1.12

Une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

Proposition 1.13

*Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.*

Proposition 1.14

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et V un ouvert de \mathbb{R}^p , alors le produit cartésien $U \times V$ est un ouvert de \mathbb{R}^{n+p} (où l'on a identifié $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ avec \mathbb{R}^{n+p}).

Plan du chapitre

- 1 Un peu de topologie sur \mathbb{R}^n :
 - Norme euclidienne
 - Boules et sphères
 - Parties ouvertes
- 2 **Limites**
 - **Cas des suites :**
 - Cas des fonctions :
 - Définitions et propriétés
 - Opérations sur les limites
 - Extension "à l'infini"
- 3 **Continuité**
 - Définition et premiers exemples
 - Opérations sur les fonctions continues
 - Applications partielles

Définition 2.1

On dit qu'une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{R}^n est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|u_k\| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Définition 2.2

On dit qu'une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{R}^n est **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|u_k - \ell\| \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad \|u_k - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ est alors unique, on l'appelle limite de la suite $(u_k)_k$ et on note $\ell = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k$ ou $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Remarque : On dispose des équivalences :

$$\begin{aligned} u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell &\iff u_k - \ell \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0_{\mathbb{R}^n} \\ &\iff \|u_k - \ell\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Proposition 2.3

Si $u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \ell$ alors $\|u_k\| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \|\ell\|$. Par conséquent, toute suite convergente est bornée.

Proposition 2.4

Soient $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de \mathbb{R}^n convergeant respectivement vers ℓ et ℓ' . Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda u_k + \mu v_k \longrightarrow \lambda \ell + \mu \ell' \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

En d'autres termes, l'ensemble des suites convergentes de \mathbb{R}^n est un \mathbb{R} -espace vectoriel, et l'application $(u_k)_k \mapsto \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k$ est linéaire.

Proposition 2.5

Soient $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers λ et $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{R}^n convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\lambda_k \cdot u_k \longrightarrow \lambda \cdot \ell.$$

Proposition 2.6

Soit $u = (u(k))_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{R}^n . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \quad \text{avec } u_i(k) \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket.$$

Les suites réelles $u_i = (u_i(k))_{k \in \mathbb{N}}$ sont appelées suites coordonnées (ou composantes) de la suite vectorielle u .

On a équivalence entre :

- ❶ la suite u converge,
- ❷ les suites coordonnées u_1, \dots, u_n convergent.

De plus, si tel est le cas, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u(k) = \left(\lim_{k \rightarrow +\infty} u_1(k), \dots, \lim_{k \rightarrow +\infty} u_n(k) \right).$$

Plan du chapitre

1 Un peu de topologie sur \mathbb{R}^n :

- Norme euclidienne
- Boules et sphères
- Parties ouvertes

2 Limites

- Cas des suites :
- Cas des fonctions :
 - Définitions et propriétés
 - Opérations sur les limites
 - Extension "à l'infini"

3 Continuité

- Définition et premiers exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- Applications partielles

Plan du chapitre

1 Un peu de topologie sur \mathbb{R}^n :

- Norme euclidienne
- Boules et sphères
- Parties ouvertes

2 Limites

- Cas des suites :
- Cas des fonctions :
 - **Définitions et propriétés**
 - Opérations sur les limites
 - Extension "à l'infini"

3 Continuité

- Définition et premiers exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- Applications partielles

Définition 2.7

Soient X une partie de \mathbb{R}^n et $a \in \mathbb{R}^n$. On dit que a est un **point adhérent** à X s'il existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers a .

Définition 2.8

Soient $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ et a un point adhérent à X . On dit que f **tend vers** $\ell \in \mathbb{R}^p$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ est alors unique, et on note $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Proposition 2.9

Soient $f : X = X_1 \cup X_2 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, a un point adhérent à X_1 et à X_2 et $\ell \in \mathbb{R}^p$. Si

$$f(x) \underset{x \rightarrow a, x \in X_1}{\longrightarrow} \ell \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a, x \in X_2}{\longrightarrow} \ell,$$

alors $f(x) \underset{x \rightarrow a, x \in X}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 2.10 (Caractérisation séquentielle)

Soient $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\ell \in \mathbb{R}^p$ et a un point adhérent à X . On a équivalence entre

① $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} \ell,$

② $\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, x_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow f(x_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell.$

Proposition 2.11

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Pour tout $x \in X$, on peut écrire $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ avec $f_i(x) \in \mathbb{R}$. On rappelle que les applications $f_1, \dots, f_p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sont appelées applications coordonnées ou composantes de f . Soit $a \in \mathbb{R}^n$ un point adhérent à X . On a équivalence entre :

- ① f tend vers $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ en a ,
- ② pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, f_i tend vers ℓ_i en a .

Plan du chapitre

1 Un peu de topologie sur \mathbb{R}^n :

- Norme euclidienne
- Boules et sphères
- Parties ouvertes

2 Limites

- Cas des suites :
- Cas des fonctions :
 - Définitions et propriétés
 - Opérations sur les limites
 - Extension "à l'infini"

3 Continuité

- Définition et premiers exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- Applications partielles

Proposition 2.12

Soient $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$, alors $(\lambda f + \mu g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \ell + \mu \ell'$.

Proposition 2.13

Soient $\alpha : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Si $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \in \mathbb{R}$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, alors $(\alpha f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \ell$.

Proposition 2.14 (Composition des limites)

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : Y \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ avec $f(X) \subset Y$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ et $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \ell$, alors $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Plan du chapitre

1 Un peu de topologie sur \mathbb{R}^n :

- Norme euclidienne
- Boules et sphères
- Parties ouvertes

2 Limites

- Cas des suites :
- Cas des fonctions :
 - Définitions et propriétés
 - Opérations sur les limites
 - Extension "à l'infini"

3 Continuité

- Définition et premiers exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- Applications partielles

Definition 1

Soit $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ avec X une partie de \mathbb{R} non majorée. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}^p$ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad x \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. On définit de manière analogue $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$, pour $X \subset \mathbb{R}$ non minorée.

Definition 2

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ avec X une partie de \mathbb{R}^p non bornée. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}^p$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad \|x\| \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} \ell$.

Definition 3

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point adhérent à X . On dit que f tend vers $+\infty$ en a si

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$. On définit de manière analogue

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty, \quad f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty, \text{ etc...}$$

Plan du chapitre

1 Un peu de topologie sur \mathbb{R}^n :

- Norme euclidienne
- Boules et sphères
- Parties ouvertes

2 Limites

- Cas des suites :
- Cas des fonctions :
 - Définitions et propriétés
 - Opérations sur les limites
 - Extension "à l'infini"

3 Continuité

- Définition et premiers exemples
- Opérations sur les fonctions continues
- Applications partielles

Definition 4

On dit que $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est **continue** en $a \in X$ si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$,
i.e. si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

Théorème 3.1

Soient $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in X$. On a équivalence entre :

- 1 f est continue en a ,
- 2 $\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = a \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = f(a)$.

Definition 5

On dit que $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est **continu** sur X si f est continue en tout point $a \in X$. On note $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans \mathbb{R}^p .

Proposition 3.2

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. On peut noter $f = (f_1, \dots, f_p)$ avec $f_i : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$. La fonction f est continue sur X si et seulement si ses fonctions coordonnées f_1, \dots, f_p sont continues sur X .

Plan du chapitre

1 Un peu de topologie sur \mathbb{R}^n :

- Norme euclidienne
- Boules et sphères
- Parties ouvertes

2 Limites

- Cas des suites :
- Cas des fonctions :
 - Définitions et propriétés
 - Opérations sur les limites
 - Extension "à l'infini"

3 Continuité

- Définition et premiers exemples
- **Opérations sur les fonctions continues**
- Applications partielles

Proposition 3.3

Soient $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur X .

Proposition 3.4

Soient $\alpha : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ continues sur X . Le produit $\alpha \cdot f$ est continu sur X .

Proposition 3.5

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : Y \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ vérifiant $f(X) \subset Y$. Si f et g sont continues (resp. sur X et Y), la composée $g \circ f$ est continue sur X .

Proposition 3.6

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $U \subset X$ un ouvert de \mathbb{R}^n . Si la restriction de f à U , notée $f|_U$, est continue sur U , alors f est continue en tout point de U .

Plan du chapitre

- 1 Un peu de topologie sur \mathbb{R}^n :
 - Norme euclidienne
 - Boules et sphères
 - Parties ouvertes
- 2 Limites
 - Cas des suites :
 - Cas des fonctions :
 - Définitions et propriétés
 - Opérations sur les limites
 - Extension "à l'infini"
- 3 **Continuité**
 - Définition et premiers exemples
 - Opérations sur les fonctions continues
 - **Applications partielles**

Definition 6

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$. Pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on définit les applications partielles

$$\begin{aligned} f_{a,j} : D_{a,j} &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ t &\longmapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

où

$$D_{a,j} = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) \in D\}.$$

avec les notations abusives :

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) &= (t, a_2, \dots, a_n) \text{ et} \\ (a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n) &= (a_1, \dots, a_{n-1}, t) \end{aligned}$$

dans les cas où $j = 1$ ou n .

Proposition 3.7

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Si f est continue en $a \in D$, alors l'application partielle $f_{a,j}$ est continue en a_j , pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$.