Continuité des fonctions vectorielles

dejou@math.univ-lyon1.fr

Dans tout le chapitre, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) par $\| \, . \, \|_E$ et $\| \, . \, \|_F$. Les notions qui vont suivre sont invariantes par passage à une norme équivalente. En particulier, elles ne dépendent pas de la norme lorsque les espaces sont de dimensions finies (ce sera donc le cas pour des fonctions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$).

1. Limites

1.1. Convergences

Définition 1.1

Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$ et a un point adhérent à X. On dit que f **tend vers** $\ell \in F$ *en a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ est alors unique, et on note $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 1.2

Soient $f : X = X_1 \cup X_2 \subset E \longrightarrow F$, *a un point adhérent à* X_1 *et à* X_2 *et* $\ell \in F$. *Si* $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in X_1}}{\longrightarrow} \ell$ *et* $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in X_2}}{\longrightarrow} \ell$, *alors* $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in X}}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 1.3 (Caractérisation séquentielle)

Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$, $\ell \in F$ *et a un point adhérent à* X. *On a équivalence entre*

- *i)* $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$,
- *ii)* $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

1.2. **Opérations sur les limites**

Proposition 1.4

Soient $f, g : X \subset E \longrightarrow F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell'$, alors $(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda\ell + \mu\ell'$.

Preuve : Soit $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ de limite a. On sait que $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell'$. Par opération sur les suites vectorielles convergentes, on en déduit que $(\lambda f + \mu g)(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell + \mu\ell'$. Ceci étant valable pour toute suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a, la caractérisation séquentielle des limites entraîne que $\lambda f + \mu g$ tend vers $\lambda\ell + \mu\ell'$ en a.

Proposition 1.5

Soient $\alpha : X \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \subset E \longrightarrow F$. Si $\alpha(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{K}$ et $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, alors $(\alpha f)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda\ell$.

Proposition 1.6 (Composition des limites)

Soient G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $f : X \subset E \longrightarrow F$ et $g : Y \subset F \longrightarrow G$ avec $f(X) \subset Y$. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ et $g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} \ell$, alors $g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Preuve : On utilise encore la caractérisation séquentielle des limites. Remarquons aussi que b est adhérent à Y puisque $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ est adhérent à $f(X)$ et $f(X) \subset Y$. Soit $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ de limite a. Comme $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$, la suite $(y_n)_n \in Y^{\mathbb{N}}$ définie par $y_n = f(x_n)$ est une suite d'éléments de Y convergeant vers b, ce qui entraîne que $(g(f(x_n)))_n$ converge vers ℓ, d'où le résultat.

1.3. **Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie**

Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Considérons $f : X \subset E \longrightarrow F$. Pour tout $x \in E$, on peut écrire

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} f_j(x) e_j \quad \text{avec } f_j(x) \in \mathbb{K} \quad \forall j \in [\![1; p]\!].$$

Définition 1.7

Les applications scalaires $f_1, \ldots, f_p : X \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$ *sont appelées* **fonctions coordonnées (ou composantes)** *de* f *relatives à la base* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$.

Proposition 1.8

Soit a *un point adhérent à* X. *On a équivalence entre :*

- *i)* f *tend vers* $\ell = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \ell_j e_j$ *en* a,
- *ii)* *pour tout* $j \in [\![1; p]\!]$, f_j *tend vers* ℓ_j *en* a.

Remarque : En cas de convergence, $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \sum_{j=1}^{p} \lim_{x \to a} f_j(x) e_j$.

1.4. **Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé produit**

Soient $F_1, \ldots, F_p$ des espaces vectoriels normés respectivement par $N_1, \ldots, N_p$ et $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ l'espace vectoriel normé produit muni de la norme infinie :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_p) \in F, \quad \|x\| = \max\{N_i(x_i) \mid i \in [\![1; p]\!]\}.$$

Considérons $f : X \subset E \longrightarrow F$. Pour tout $x \in F$, on peut écrire $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$ avec $f_i(x) \in F_i$. Les applications $f_1, \ldots, f_p$ sont appelées applications coordonnées ou composantes de f.

Proposition 1.9

Soit $a \in E$ un point adhérent à X. On a équivalence entre :

- (i) *f tend vers $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$ en a,*
- (ii) *pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, f_i tend vers ℓ_i en a.*

1.5. **Extension "à l'infini"**

Définition 1.10

Soit $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow F$ *avec* X *une partie de* $\mathbb{R}$ *non majorée. On dit que* f *tend vers* $\ell \in F$ *en* $+\infty$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad x \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. *On définit de manière analogue* $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$, *pour* $X \subset \mathbb{R}$ *non minorée.*

Définition 1.11

Soit $f : X \subset E \longrightarrow F$ *avec* X *une partie de* E *non bornée. On dit que* f *tend vers* $\ell \in F$ *lorsque* $\|x\|_E \to +\infty$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad \|x\|_E \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{\|x\|_E \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Définition 1.12

Soit $f : X \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* a *un point adhérent à* X. *On dit que* f *tend vers* $+\infty$ *en* a *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$. *On définit de manière analogue* $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$, $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, *etc...*

2. Continuité

2.1. Définitions et exemples

Définition 2.1

On dit que $f : X \subset E \longrightarrow F$ *est* **continue** *en* $a \in X$ *si* $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$, *i.e. si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon.$$

Théorème 2.2 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$ *et* $a \in X$. *On a équivalence entre :*

- *i)* f *est continue en* a,
- *ii)* $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n \to +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a).$

Définition 2.3

On dit que $f : X \subset E \longrightarrow F$ est **continue** *sur X si f est continue en tout point $a \in X$. On note $\mathcal{C}(X, F)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans F.*

Proposition 2.4

Soit $f : X \subset E \longrightarrow F$ et $U \subset X$ un ouvert de E. Si la restriction de f à U (notée $f_{|_U}$) est continue sur U, alors f est continue en tout point de U.

Définition 2.5

Une application $f : X \subset E \longrightarrow F$ est dite **lipschitzienne** *s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\forall x, y \in X, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

Proposition 2.6

Les applications lipschitziennes sont continues.

2.2. **Opérations sur les fonctions continues**

Proposition 2.7

Soient $f, g : X \subset E \longrightarrow F$ *continues et* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$*. La fonction* $\lambda f + \mu g$ *est continue sur* X*.*

Proposition 2.8

Soient $\alpha : X \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$ *et* $f : X \subset E \longrightarrow F$ *continues sur* X*. Le produit* $\alpha \cdot f$ *est continu sur* X*.*

Proposition 2.9

Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$ *et* $g : Y \subset F \longrightarrow G$ *vérifiant* $f(X) \subset Y$*. Si* f *et* g *sont continues, la composée* $g \circ f$ *est continue sur* X*.*

2.3. **Fonction à valeurs dans un evn de dim finie ou un evn produit**

Proposition 2.10

Si F est de dimension finie, alors $f : X \subset E \longrightarrow F$ est continue si et seulement si ses fonctions coordonnées dans une base de F le sont.

Proposition 2.11

Soit $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ un espace normé produit, et $f : X \subset E \longrightarrow F$. On peut noter $f = (f_1, \ldots, f_p)$ avec $f_i : X \subset E \longrightarrow F_i$ pour tout $i \in [\![1; p]\!]$. La fonction f est continue sur X si et seulement si ses composantes f_i le sont.

3. Continuité et topologie

3.1. Autres caractérisations équivalentes de la continuité

Théorème 3.1

Soit $f : E \longrightarrow F$. On a équivalence entre :

- i) *f est continue sur E,*
- ii) *l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E,*
- iii) *l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.*

Remarque : Attention, le résultat est faux en terme d'image directe.

3.2. **Continuité et compacité**

Théorème 3.2

Soient $K \subset E$ un compact et $f : K \longrightarrow F$ une application continue. Alors $f(K)$ est un compact de F.
En d'autres termes, l'image d'une partie compacte par une application continue est une partie compacte.

Corollaire 3.3

Soit $f : K \subset E \longrightarrow F$. Si K est une partie compacte de E et f continue, alors f est bornée.

Théorème 3.4 (Théorème des bornes atteintes)

Soit $f : K \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue où K est un compact non vide de E. Alors f est bornée et atteint ses bornes (elle admet un minimum et un maximum).

4. **Continuité des applications linéaires**

Théorème 4.1

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) *u est continue,*
- ii) *u est continue en 0_E,*
- iii) $\exists k \geq 0, \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$,
- iv) *u est bornée sur la boule unité fermée,*
- v) *u est bornée sur la sphère unité,*
- vi) *u est lipschitzienne,*

Théorème 4.2

Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.