Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2023-2024

Analyse 3 Durée : 1 heure 30

Session 2 - Examen final du 25 juin 2024

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Les deux questions sont indépendantes.

1. Déterminer la nature de la série numérique de terme général $u_n = \dfrac{n(-1)^n}{n^2+3}$ (en cas de convergence, on précisera s'il y a convergence absolue, en cas de divergence, on précisera si la divergence est grossière).
2. Soit $a \in [0;4[$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{(x^a+x^4)^{\frac{3}{4}}}\,\mathrm{d}x$ soit convergente.

Exercice 2. Pour $n \geq 1$, on définit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) \text{ si } x \in [0; \frac{1}{n}] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?
3. Démontrer de nouveau le résultat sur la convergence uniforme sur $[0;1]$ sans utiliser l'intégrale précédente.
4. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[a;1]$ pour $a \in]0;1]$.

Exercice 3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose (lorsque cela a un sens)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x-k)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction f.
2. Montrer que f est 1-périodique.
3. (a) Étudier $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$, où $g(x) = f(x) - \frac{1}{x^2}$ pour tout $x \in D$.
   (b) En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
4. Que vaut $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?
5. Montrer que f est continue sur D.
6. Soit h la restriction de f à l'intervalle $]0,1[$. Montrer que h admet un minimum.

Exercice 4. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1}a_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que $1 \leq a_n \leq n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$?
3. On note f la fonction somme de cette série entière. Justifier l'existence de f' sur un intervalle I, puis à l'aide de l'écriture de $f'(x)$ pour $x \in I$ et de la relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_n$, montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $(E) : (x+\alpha)f'(x) + (\beta + 2x)f(x) = 0$ où α et β sont deux entiers à déterminer.
4. Déterminer explicitement f à l'aide de fonctions usuelles sur I.
5. Développer en séries entières au voisinage de 0 les fonctions $x \longmapsto e^{-2x}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^3}$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-2)^p(n-p+1)(n-p+2)}{2 \times p!}.$$

Correction de l'examen de session 2 d'analyse 3 du 25 juin 2024

Correction de l'exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = \dfrac{n}{n^2+3}$ et $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n} \geq 0$. Par comparaison de séries à termes positifs, la règle de Riemann entraîne que la série $\sum |u_n|$ est divergente (non grossièrement), donc la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente. Cependant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on remarque que $(-1)^n u_n \geq 0$, donc la suite $(u_n)_n$ est alternée. L'étude précédente montre que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Enfin, si l'on pose $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+3}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' : x \longmapsto \dfrac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$ négative sur $[\sqrt{3};+\infty[$. Par conséquent, la suite $(|u_n|)_{n\geq 2} = (f(n))_{n\geq 2}$ est décroissante. Le critère spécial des séries alternées garantit donc la convergence de la série $\sum u_n$.

2. Posons $g :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{(x^a+x^4)^{\frac{3}{4}}}$. La fonction g est continue sur $]0;+\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0;+\infty[$. De plus, pour tout $x \geq 1$,
$$0 \leq |g(x)| \leq \frac{1}{(x^a+x^4)^{\frac{3}{4}}} \leq \frac{1}{(x^4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{x^3}$$
Or la fonction de Riemann $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$, donc par comparaison de fonctions positives, g est intégrable sur $[1;+\infty[$, et ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ est donc de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$. De plus, sur $]0;1]$, sin est à valeurs positives, donc g aussi. La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ équivaut donc à l'intégrabilité de g sur $]0;1]$. Enfin,
$$g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{(x^a)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{x^{\frac{3a}{4}-1}}$$
et la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{\frac{3a}{4}-1}}$ est intégrable sur $]0;1]$, si, et seulement si,
$$\frac{3a}{4} - 1 < 1 \iff a < \frac{8}{3}$$
(remarquons que $\dfrac{8}{3} < \dfrac{9}{3} = 3$). On en conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente si, et seulement si, $a \in \left[0;\dfrac{8}{3}\right[$.

Correction de l'exercice 2

1. Soit $x_0 \in [0;1]$. Si $x_0 = 0$ alors $f_n(x_0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ donc $f_n(x_0)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Si maintenant $x_0 \in]0;1]$. Comme $1/n$ tend 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $x_0 \in]1/n;1]$. Ainsi pour $n \geq N$, $f_n(x_0) = 0$ donc $f_n(x_0)$ tend vers 0. Finalement la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle (sur $[0;1]$).

2. Comme f_n est nulle sur $]1/n;0]$, on peut écrire $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/n} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Une primitive de $f_n(x)$ est $F_n(x) = \frac{n^2}{2}x^2 - \frac{n^3}{3}x^3$ ce qui donne
$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{n^2}{2}x^2 - \frac{n^3}{3}x^3\right]_0^{1/n} = 1/2 - 1/3 = 1/6$$
ceci pour tout $n \geq 1$. Cela montre que la convergence n'est pas uniforme sur $[0;1]$ car sinon la limite, quand $n \to +\infty$, de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ serait égale à $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

3. Notons f la limite simple de la suite (f_n), i.e. la fonction nulle sur $[0;1]$. Remarquons que $|f_n(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{2n})| = |n^2 \frac{1}{2n}(1 - n\frac{1}{2n}) - 0| = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2} = n$. Cela montre que $\sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)| \geq n$ et nous dit que la convergence n'est pas uniforme sur $[0;1]$.

   Remarque : Une autre méthode consisterait à faire l'étude des variations de $|f_n(x) - f(x)|$ sur $[0;1]$ pour en déterminer le sup (ou le max ici).

4. Puisque $1/n$ tend vers 0, il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, $a > 1/n$. Ainsi pour $n \geq N$, f_n est identiquement nulle sur $[a;1]$. Cela montre que $|f_n - f|$ est identiquement nulle sur $[a;1]$. Le sup de cette fonction sur $[0;1]$ sera nul pour tout $n \geq N$ et tendra donc vers 0 d'où la convergence uniforme sur $[a;1]$.

Correction de l'exercice 3

1. Pour que chaque fraction soit définie, il faut et il suffit que $x \notin \mathbb{Z}$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ fixé, $1/(x-k)^2 \sim 1/k^2$, lorsque $|k| \to +\infty$. Par le théorème de comparaison des séries à terme positif et le critère de Riemann, on conclue que f a pour domaine $D = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

2. On déduit de la première question que $f(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{(x-k)^2}$. D'où,

$$f(x+1) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{(x-(k-1))^2} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-N-1}^{N-1} \frac{1}{(x-k)^2} = f(x)$$

3. Pour $|k| \geq 1$ et $|x| \leq 1/2$, on a la majoration

$$\frac{1}{(x-k)^2} \leq \frac{1}{(|k|-1/2)^2}$$

   Les séries définissant g convergent donc uniformément sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$ et on peut passer à la limite terme à terme :

$$\lim_{x\to 0} g(x) = g(0) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

   Il s'en suit que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

4. Fixons $x_0 \in D$. Il existe un unique entier $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $k_0 < x_0 < k_0 + 1$. Notons $\varepsilon = \min(x - 0 - k_0, k_0 + 1 - x_0) > 0$. Pour $k < k_0$ et $x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, on voit que $\frac{1}{(x-k)^2} \leq \frac{1}{(k-k_0)^2}$ et de même pour $k > k_0 + 1$, $\frac{1}{(x-k)^2} \leq \frac{1}{(k-k_0-1)^2}$ Ainsi les séries définissant $f(x) - \frac{1}{x-k_0^2} - \frac{1}{x-(k_0+1)^2}$ convergent uniformément. Il s'en suit que f est continue au point x_0.

5. Par périodicité, $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) > f(0)$ si $x \in]0, \varepsilon[\cup]1-\varepsilon, 1[$. D'où, $\inf_{]0,1[} h = \inf_{[}\varepsilon, 1-\varepsilon]h$. Comme h est continue sur le segment $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, on conclue que h admet et atteint son minimum.

Correction de l'exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{H}_n$ l'assertion "$1 \leq a_n \leq n^2$". Puisque $a_1 = 1$, $\mathcal{H}_1$ est vérifiée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{H}_k$ vraie pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, alors par l'hypothèse de récurrence de l'énoncé, on a d'une part

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1} \geq 1 + \frac{2}{n+1} \geq 1$$

   et d'autre part

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1} \leq n^2 + \frac{2}{n+1}(n-1)^2 = \frac{n^3+3n^2-4n+2}{n+1} \leq \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n+1} = (n+1)^2$$

   car $-4n+2 \leq 3n+1 \iff 1 \leq 7n$ et cette dernière inégalité est vraie pour tout $n \geq 1$. Par le principe de récurrence forte, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.

2. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 1$, $c_n = n^2$ et R_a le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. Comme b_n et c_n sont non nuls pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence R_b (resp. R_c) de la série entière $\sum b_n x^n$ (resp. $\sum c_n x^n$) est égal à 1. L'inégalité obtenue à la question précédente entraîne que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|x^n| \leq a_n |x|^n \leq c_n |x^n|$. Par suite, si $|x| < R_c = 1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge absolument par comparaison de séries à termes positifs, donc $R_a \geq R_c$. De même, si $|x| > R_b = 1$, la série numérique $\sum |x|^n$ diverge grossièrement, donc il en est de même de la série numérique $\sum a_n x^n$. Ainsi, $R_a \leq R_b$, d'où $R_a = 1$ par double inégalités.

   On aurait aussi pu utiliser la croissance de la fonction racine nième sur $\mathbb{R}^+$, pour déduire de l'inégalité de la question précédente que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 = 1^{\frac{1}{n}} \leq a_n^{\frac{1}{n}} = |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq (n^2)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{2}{n}\ln n}$$

   Or par croissances comparées et continuité de la fonction exponentielle, $e^{\frac{2}{n}\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc par encadrement, $|a_n|^{\frac{1}{n}}$ converge aussi vers 1. Par la règle de Cauchy, le rayon de convergence R_a recherché vaut $\dfrac{1}{1} = 1$.

3. La fonction somme f de la série entière $\sum a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$, et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme. Ainsi, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)a_n + 2a_{n-1}\right) x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^{n-1} \\
&= 1 + x f'(x) + (f(x) - 1) + 2x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n
\end{aligned}$$

   d'où $(x-1)f'(x) + (1+2x)f(x) = 0$, ce qui démontre que f est solution sur $]-1;1[$ de l'équation différentielle linéaire du 1er ordre homogène $(E) : (x-1)y'(x) + (1+2x)y(x) = 0$, et celle-ci est résoluble sur $]-1;1[$.

4. On cherche une primitive A sur $]-1;1[$ de la fonction continue $a : x \longmapsto \dfrac{1+2x}{x-1} = \dfrac{3+2(x-1)}{x-1} = \dfrac{3}{x-1} + 2$. La fonction $A : x \longmapsto 3\ln(|x-1|) + 2x$ convient. Par résolution de (E), il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que,

$$\forall x \in]-1;1[, \quad f(x) = \lambda e^{-A(x)} = \lambda e^{-3\ln(1-x) - 2x} = \lambda \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}.$$

   Par ailleurs, $f(0) = a_0 = 1$, donc $\lambda = 1$.

5. Par les développements en séries entières usuels,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n.$$

   De même, pour tout $x \in]-1;1[$, $g(x) := \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, donc par dérivation terme à terme de la somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence,

$$\forall x \in]-1;1[, \quad g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n, \quad g''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) x^n$$

ce qui entraîne

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n.$$

6. Puisque pour tout $x \in]-1;1[$, $f(x) = e^{-2x}\dfrac{1}{(1-x)^3}$, par produit de Cauchy,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{(-2)^p}{p!} \frac{(n-p+1)(n-p+2)}{2} \right) x^n$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-2)^p (n-p+1)(n-p+2)}{2 \times p!}.$$