Examen final du 18 décembre 2023

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.
Les 5 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. Déterminer la nature des séries numériques de termes généraux suivants (en cas de divergence, on précisera s'il s'agit de divergence grossière ou non, et en cas de convergence, on précisera s'il y a convergence absolue ou non) :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{1}{1+e^{\frac{2}{n}}} - \dfrac{1}{2}\cos\left(\sqrt{\dfrac{2}{n}}\right),$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{(-7)^n(3n+5)!}{n^{24}+4n^2+2},$

Exercice 2. Soit $a > 0$. On considère la fonction $g_a :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t > 0, \quad g_a(t) = \frac{e^{-t^a}}{t^{2a+1}+t^{2a}}.$$

1. Montrer que la fonction g_a est intégrable sur $[1;+\infty[$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_a(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, la fonction g_a est intégrable sur $]0;1]$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_a(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0;2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0;2], f_n(x) = \frac{\cos((x-1)^{2n}\pi)}{x+n}.$$

On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n = nf_n \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. (a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0;2]$ vers une fonction f que l'on précisera.
   (b) Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0;2]$.
2. (a) Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0;2]$ vers une fonction g que l'on précisera.
   (b) Justifier pourquoi cette convergence ne peut pas être uniforme sur $[0;2]$.
   (c) Montrer que $(g_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $]0;2[$.
3. Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de I_n.
4. (a) Déterminer une constante réelle C telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0;2]$, $|g_n(x)| \leq C$.
   (b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ à déterminer tel que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n}$.

Exercice 4. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est développable en série entière en 0 et déterminer son développement en série entière. On précisera le rayon de convergence de la série entière associée.

Exercice 5. On considère la série entière d'une variable réelle $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence, noté R, de cette série entière.
2. Préciser l'intervalle de convergence I de cette série entière.
3. Étudier la convergence normale de cette série entière sur I.
4. On note f la fonction somme de cette série entière sur I. Montrer que f est continue sur I.
5. À l'aide du théorème de dérivation des séries de fonctions, montrer que f est dérivable sur $[-R; R]$ et expliciter $f'(x)$ pour tout $x \in]-R; R[$ (on donnera une expression ne faisant plus intervenir de somme infinie).
6. En déduire une expression explicite (sans somme) de $f(x)$ pour tout $x \in]-R; R[$ puis pour tout $x \in I$.

Correction de l'examen final (session 1) d'analyse 3 de 2023-2024

Correction de l'exercice 1

1. On utilise les développements limités usuels en 0 afin de déterminer un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$. Comme $\frac{2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, lorsque $n \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{1+1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{4}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{-1} - \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= -\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{12n^2} \leq 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $|u_n| \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{12n^2} \geq 0$. Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$), la série $\sum |u_n|$ converge absolument par comparaison de séries à termes positifs. Par conséquent, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| = \frac{7^n(3n+5)!}{n^{24}+4n^2+2} > 0$ (le dénominateur est toujours strictement positif donc v_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$). Ainsi, comme $|v_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{7^n(3n+5)!}{n^{24}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{7^{n+1}(3n+8)!}{(n+1)^{24}}\frac{n^{24}}{7^n(3n+5)!}\\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} 7(3n+6)(3n+7)(3n+8) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty > 1
\end{aligned}$$

Ainsi, la série numérique $\sum |v_n|$ diverge grossièrement donc il en est de même de la série $\sum v_n$.

Correction de l'exercice 2

1. La fonction g_a est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc en particulier intégrable sur tout segment de la forme $[1;A]$ avec $A > 1$. De plus, comme $\frac{t^{2a+1}+t^{2a}}{t^{2a+1}} = 1+\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on dispose de l'équivalent

$$g_a(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-t^a}}{t^{2a+1}} \quad \text{d'où} \quad \frac{g_a(t)}{\frac{1}{t^2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{1-2a}e^{-t^a} = e^{(1-2a)\ln(t)-t^a} = e^{-t^a\left(1+(2a-1)\frac{\ln(t)}{t^a}\right)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

car par croissances comparées $\frac{\ln(t)}{t^a} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $-t^a\left(1+(2a-1)\frac{\ln(t)}{t^a}\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Ainsi, $g_a(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et puisque la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ par la règle de Riemann, il en est de même de la fonction g_a par comparaison.

2. Comme g_a est continue et à valeurs positives sur $]0;1]$, l'intégrabilité de g_a sur $]0;1]$ équivaut à la convergence de l'intégrale $\int_0^1 g_a(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Par la question précédente, on cherche à quelle condition sur a la fonction g_a est intégrable sur $]0;1]$. La continuité de g_a implique son intégrabilité sur tout segment de la forme $[B;1]$ avec $0 < B < 1$. Au voisinage de 0, on a $t^{2a+1}+t^{2a} = t^{2a}(t+1) \underset{t\to0}{\sim} t^{2a}$ et puisque $a > 0$, $t^a \underset{t\to0}{\longrightarrow} 0$ ce qui entraîne $e^{-t^a} \underset{t\to0}{\sim} 1$, d'où

$$g_a(t) \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{t^{2a}}.$$

Par la règle de Riemann, on en déduit que la fonction g_a est intégrable sur $]0;1]$ si, et seulement si, $2a < 1$, ce qui équivaut à $a < \dfrac{1}{2}$. Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_a(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $a < \dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3

1. (a) Soit $x_0 \in [0;2]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x_0)| \leq \dfrac{1}{x_0+n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par théorème des gendarmes, $f_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci démontre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0;2]$ vers la fonction nulle, que l'on notera f.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [0;2]$,

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$$

   puisque $x+n \geq n > 0$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, $\dfrac{1}{x+n} \leq \dfrac{1}{n}$. Par suite, la fonction $f_n - f$ est bornée sur $[0;2]$, et comme la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit majorant de l'ensemble, on en déduit que

$$0 \leq \|f_n - f\|_{\infty;[0;2]} = \sup_{x\in[0;2]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

   Par encadrement, ceci démontre que $\|f_n - f\|_{\infty;[0;2]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et prouve ainsi la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $[0;2]$ vers la fonction f.

2. (a) Soit $x_0 \in [0;2]$. Alors $\dfrac{n}{x_0+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et puisque $x_0 - 1 \in [-1;1]$, $(x_0-1)^2 \in [0;1[$ si $x_0 \in]0;2[$, et $(x_0-1)^2 = 1$ si $x \in \{0;2\}$, d'où

$$(x_0-1)^{2n} = ((x_0-1)^2)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0;2[\\ 1 & \text{si } x \in \{0;2\}. \end{cases}$$

   Ainsi, si $x_0 \in]0;2[$, $g_n(x_0) = \dfrac{n\cos((x_0-1)^{2n}\pi)}{x_0+n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(0) = 1$ et si $x \in \{0;2\}$, $g_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(\pi) = -1$. La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc simplement sur $[0;2]$ vers la fonction $g : [0;2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = 1 \text{ si } x \in]0;2[\text{ et } g(x) = -1 \text{ si } x \in \{0;2\}.$$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est continue sur $[0;2]$ (par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas car $n \geq 1$), alors que sa limite simple g est discontinue en 0 et en 2. En effet,

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \neq -1 = g(0)$$

   ainsi il ne peut pas y avoir convergence uniforme de $(g_n)_n$ vers g sur $[0;2]$ car la convergence uniforme préserve la continuité.

   (c) Si la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge uniformément sur $]0;2[$, c'est nécessairement vers sa limite simple g. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^{\frac{1}{n}}}$, alors $x_n \in]0;2[$ et

$$|g_n(x_n) - g(x_n)| = \left|\frac{n}{x_n+n}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1\right| = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

   Comme, sous réserve d'existence de la borne supérieure ci-dessous,

$$\|g_n - g\|_{\infty;]0;2[} \geq ||g_n(x_n) - g(x_n)|| \qquad \text{car } x_n \in]0;2[$$

   il n'est pas possible que $\|g_n - g\|_{\infty;]0;2[}$ tende vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Ainsi, la suite de fonctions $(g_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $]0;2[$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur le segment $[0;2]$, et que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur le segment $[0;2]$ vers la fonction nulle f, par le théorème d'interversion limite/intégrale, on obtient directement
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$
4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;2]$, alors par $x+n \geq n$ donc $0 < \dfrac{n}{x+n} \leq 1$ ce qui entraîne
$$|g_n(x)| = \frac{n}{x+n}\left|\cos((x-1)^{2n}\pi\right| \leq 1$$
et la constante $C = 1$ convient.

(b) On va chercher à déterminer la limite, si elle existe, de $nI_n = \displaystyle\int_0^2 nf_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 g_n(x)\,\mathrm{d}x$. Puisqu'il n'y a pas convergence uniforme de la suite de fonctions $(g_n)_n$ sur le segment $[0;2]$, on va chercher à utiliser le théorème de convergence dominée.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est continue, donc continue par morceaux sur $]0;2[$.
- La suite de fonctions $(g_n)_n$ converge simplement sur $]0;2[$ vers la fonction constante égale à 1, notée $\widetilde{1}$, qui est continue donc continue par morceaux sur $]0;1[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0;2[$, $|g_n(x)| \leq 1 := \varphi(x)$ et la fonction φ est continue (donc c.p.m.), à valeurs positives et intégrable sur $]0;2[$ car prolongeable par continuité sur le segment $[0;2]$.

Par le théorème de convergence dominée,
$$\lim_{n\to+\infty} nI_n = \int_0^2 \widetilde{1}\,\mathrm{d}x = 2 \neq 0 \quad \text{d'où} \quad I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$
Ainsi, il existe $\alpha = 2 \in \mathbb{R}^*$ tel que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\alpha}{n}$.

Correction de l'exercice 4

1. La fonction g est l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 de la fonction continue $x \longmapsto \sin(x^2)$. Par le théorème fondamental de l'intégration, g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \sin(x^2)$.
2. On sait que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\sin(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$
ce qui démontre que g' est développable en série entière en 0, et le rayon de convergence de la série entière associée est $R = +\infty$. Par le cours, la fonction g est aussi développable en série entière en 0, la série entière associée a le même rayon de convergence $R = +\infty$, et son développement en série entière en 0 s'obtient par intégration terme à terme :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = g(0) + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}.$$

Correction de l'exercice 5

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left|(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{4n^2-1}\right| = \dfrac{|x|^{2n+1}}{4n^2-1}$, alors $|u_n| > 0$ et

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|^{2n+3}}{4(n+1)^2-1}\frac{4n^2-1}{|x|^{2n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|x|^2\,4n^2}{4n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|^2 .$$

Par ailleurs, par stricte croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}^+$, on dispose de l'équivalence : $|x|^2 < 1 \iff |x| < 1$. Ainsi, par la règle de D'Alembert sur les séries numériques,
   - Si $|x| < 1$, alors $|x|^2 < 1$ et la série numérique $\sum u_n$ converge, donc la série numérique $\sum (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$ converge (absolument). Ceci entraîne $R \geq 1$.
   - Si $|x| > 1$, alors $|x|^2 > 1$ et la série numérique $\sum u_n$ diverge grossièrement, donc il en est de même de la série numérique $\sum (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$. Ceci implique $R \leq 1$.

   On conclut par double inégalités que $R = 1$.

2. Par le cours sure les séries entières, on sait que l'intervalle I de convergence vérifie $]-R;R[\subset I \subset [-R;R]$. Il reste donc à étudier la nature de la série numérique $\sum (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$ pour $x = 1$ et $x = -1$. Pour $x \in \{-1;1\}$, on a

$$\left|(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}\right| = \frac{1}{4n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$$

Comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est convergente, il en est de même de la série numérique $\sum \left|(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{4n^2-1}\right|$ par comparaison de séries à termes positifs, ce qui démontre que la série $\sum (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$ converge pour $x \in \{-1;1\}$, donc $I = [-1;1]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : x \in [-1;1] \longmapsto (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$. Pour tout $x \in [-1;1]$, on a

$$|f_n(x)| = \frac{|x|^{2n+1}}{4n^2-1} \leq \frac{1}{4n^2-1}$$

La majoration étant valable pour tout $x \in [-1;1]$, on en déduit que la fonction f_n est bornée sur $[-1;1]$. De plus, comme la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit majorant de cet ensemble,

$$\|f_n\|_{\infty;[-1;1]} = \sup_{x\in[-1;1]} |f_n(x)| \leq \frac{1}{4n^2-1}$$

On a prouvé ci-dessus que la série numérique $\sum \dfrac{1}{4n^2-1}$ est convergente, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty;[-1;1]}$ converge aussi, ce qui achève de prouver la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[-1;1]$.

4. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur I, et que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur I, le théorème de continuité pour les séries de fonctions donne la continuité de la fonction somme f sur I.

5. Le cours sur les séries entières donne seulement la dérivabilité de f sur $]-1;1[$, on va donc chercher à utiliser le théorème de dérivation des séries de fonctions.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1;1]$, et pour tout $x \in [-1;1]$, $f_n'(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(2n+1)x^{2n}}{4n^2-1} = (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n}}{2n-1}$.
   - La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I.

- Soit $x \in [-1;1]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n f_n'(x) = -\dfrac{x^{2n}}{2n-1} \leq 0$ donc la série numérique $\sum f_n'(x)$ est alternée. De plus, $0 \leq |f_n'(x)| \leq \dfrac{1}{2n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $|f_n'(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Enfin, comme $x^2 \in [0;1]$, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq x^{2n+2} \leq x^{2n}$ et par décroissance de la fonction inverse $0 \leq \dfrac{1}{2n+1} \leq \dfrac{1}{2n-1}$ d'où $\left|f_{n+1}'(x)\right| \leq |f_n'(x)|$ ce qui démontre la décroissance de la suite $(|f_n'(x)|)_{n\geq 1}$. La série numérique $\sum f_n'(x)$ vérifie donc le critère des séries alternées. En notant $R_n(x)$ son reste d'ordre n, il vient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [-1;1], \quad |R_n(x)| \leq \left|f_{n+1}'(x)\right| = \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1}.$$

  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction R_n est bornée sur $[-1;1]$ et par passage à la borne supérieure,

$$0 \leq \|R_n\|_{\infty;[-1;1]} \leq \frac{1}{2n+1}.$$

  Comme $\dfrac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $\|R_n\|_{\infty;[-1;1]} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui prouve que la suite de fonctions $(R_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[-1;1]$ vers la fonction nulle. Par conséquent, la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[-1;1]$.

Par le théorème de dérivation des séries de fonctions, la fonction somme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1;1]$ et

$$\forall x \in [-1;1], \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n-1}.$$

On transforme alors l'écriture ci-dessus pour reconnaître un développement en série entière usuel.

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1;1[, \quad f'(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+2}}{2p+1} \\
&= x \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} \\
&= x \arctan(x)
\end{aligned}$$

6. Soit $x \in]-1;1[$, alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + \int_0^x t \arctan(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \left[\frac{1}{2} t^2 \arctan(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{\frac{1}{2} t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{par intégration par parties} \\
&= \frac{1}{2} x^2 \arctan(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(x^2 \arctan(x) - x + \arctan(x)\right)
\end{aligned}$$

Puisque de plus la fonction f et la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(x^2 \arctan(x) - x + \arctan(x)\right)$ sont continues sur $[-1;1]$, l'égalité ci-dessus est encore valable en 1 et en -1.