Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2024-2025

Analyse 3 Durée : 1 heure 30

Session 2 - Examen final du 24 juin 2025

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones ou montres connectées est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ? on donnera une démonstration si elle est vraie et un contre-exemple si elle est fausse : si f est une fonction développable en série entière en 0, alors la fonction $g : x \longmapsto f(3x^5)$ est développable en série entière en 0.

Exercice 2.

1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\sum (-1)^n \sin(\frac{1}{n^\alpha})$ est-elle absolument convergente ?
2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\sum (-1)^n \sin(\frac{1}{n^\alpha})$ est-elle semi-convergente ?
3. Soit $\alpha > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, donner une majoration simple du reste d'ordre n de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} (-1)^n \sin(\frac{1}{n^\alpha})$.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
4. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?
5. La fonction somme est-elle continue sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = \frac{x^n}{x^{2n}+1}.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur l'entier n pour que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.
3. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}^+$, puis sur $[0; 1[$ et enfin sur $[0; a]$ pour $a \in]0; 1[$.
4. Déterminer la limite, lorsque $n \to +\infty$, de I_n.

Exercice 5. On considère la série entière
$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(n+1)}{n4^n} x^n.$$

1. Déterminer son rayon de convergence.
2. Déterminer son domaine de convergence
3. Déterminer la valeur de sa somme pour x dans l'intervalle ouvert de convergence

Correction de l'examen de session 2 d'analyse 3 du 24 juin 2025

Correction de l'exercice 1 VRAIE : si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est développable en série entière en 0, il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tels que

$$]-r;r[\subset I \text{ et } \forall x \in]-r;r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Par conséquent, si $x \in \mathbb{R}$ tel que $\left|3x^5\right| < r$, $g(x) = f(3x^5) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (3x^5)^n$. Or par stricte croissance de la fonction racine cinquième sur $\mathbb{R}$,

$$\left|3x^5\right| < r \iff 3\left|x\right|^5 < r \iff \left|x\right|^5 < \frac{r}{3} \iff \left|x\right| < \left(\frac{r}{3}\right)^{\frac{1}{5}} := r'.$$

Ainsi,

$$\forall x \in]-r';r'[\text{ (avec } r' > 0), \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n 3^n x^{5n} = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^p \text{ où } b_p = \begin{cases} a_n 3^n \text{ si } \exists n \in \mathbb{N}, p = 5n \\ 0 \text{ si } p \not\equiv 0[5] \end{cases}$$

ce qui démontre que g est développable en série entière en 0.

Correction de l'exercice 2

1. La suite de TG $|(-1)^n \sin(\frac{1}{n^\alpha})|$ n'admet pas de limite si $\alpha < 0$. Pour $\alpha = 0$, sa limite est non nulle. Dans les deux cas, la série diverge grossièrement. Si $\alpha > 0$,

$$|(-1)^n \sin(\frac{1}{n^\alpha})| = |\sin(\frac{1}{n^\alpha})| \sim \frac{1}{n^\alpha},$$

lorsque $n \to +\infty$. D'après le théorème sur les équivalents et le critère de Riemann, on conclut que la série est ACV ssi $\alpha > 1$.

2. Rappelons que la série DVG si $\alpha \leq 0$. Si $\alpha > 0$, comme

$$0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{pour } n \geq 1,$$

la suite de TG $\sin(\frac{1}{n^\alpha})$ décroit vers 0. Par le critère spécial, la série est donc semi-convergente ssi $\alpha > 0$.

3. D'après le cours, le reste est majoré par

$$|R_n| \leq \sin\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

Correction de l'exercice 3

1. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Si $x = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = 0$ et la série de terme général nul converge. Si $x > 0$, alors par croissances comparées, $u_n(x) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc par comparaison de séries à termes positifs et la règle de D'Alembert, $\sum u_n(x)$ converge.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \in \mathbb{R}^+$, donc sous réserve d'existence de la borne supérieure ci-dessous,

$$\|u_n\|_{\infty;\mathbb{R}^+} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |u_n(x)| \geq |u_n(x_n)| = e^{-1} > 0.$$

Ainsi, $\|u_n\|_{\infty;\mathbb{R}^+}$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$ donc la série numérique $\sum \|u_n\|_{\infty;\mathbb{R}^+}$ ne peut pas converger. La série de fonctions $\sum u_n$ ne converge donc pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

3. Soit $a > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction u_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$u_n'(x) = nx(2 - \sqrt{n}x)e^{-x\sqrt{n}}$$

qui est du signe de $2 - \sqrt{n}x$. Ainsi, u_n est croissante sur $[0; 2/\sqrt{n}]$ et décroissante sur $[2/\sqrt{n}; +\infty[$. Comme $u_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n(x) = 0$, l'étude des variations montre que la fonction u_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$, donc a fortiori sur $[a; +\infty[$. De plus, comme $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ et $a > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{2}{\sqrt{n}} < a$. Par conséquent, pour $n \geq n_0$, u_n est décroissante sur $[a; +\infty[$, donc par positivité de u_n,

$$\|u_n\|_{\infty;[a;+\infty[} = \sup_{x \in [a;+\infty[} |u_n(x)| = \sup_{x \in [a;+\infty[} u_n(x) = u_n(a)$$

et la série numérique $\sum u_n(a)$ converge d'après l'étude de la convergence simple. Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a; +\infty[$.

4. On a vu ci-dessus que $\|u_n\|_{\infty;\mathbb{R}^+}$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Ainsi, la suite de fonctions $(u_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle, donc il est impossible que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

5. Par le théorème de continuité, on peut montrer que la somme est continue sur $]0; +\infty[$ mais cela ne répond pas à la question posée. Notons S la fonction somme et supposons par l'absurde que S est continue en 0. Alors,

$$S(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} S(0) = 0.$$

Or pour $x \in \mathbb{R}^+$, par positivité de chacun des termes $u_n(x)$, on dispose de la minoration :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S(x) \geq u_n(x)$$

d'où

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = e^{-1} > 0$$

ce qui contredit le fait que $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} S(0) = 0$. Ainsi S n'est pas continue sur $\mathbb{R}^+$.

Correction de l'exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue et à valeurs positives sur $\mathbb{R}^+$, donc la convergence de l'intégrale I_n équivaut à l'intégrabilité de f_n sur $\mathbb{R}^+$. Comme f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, elle est intégrable sur tout segment de la forme $[0; a]$ avec $a > 0$. Lorsque $x \to \infty$,

$$f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{x^n}{x^{2n}} = \frac{1}{x^n}$$

Comme la fonction de Riemann $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ est intégrable sur $[a; +\infty[$ si, et seulement si, $n > 1$. On en déduit que la fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, $n \geq 2$. Ainsi, I_n est convergente si, et seulement si, $n \geq 2$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Si $x \in [0;1[$, alors $x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (de même avec x^{2n}), donc $f_n(x)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Si $x = 1$, alors $f_n(x) = \dfrac{1}{2}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque $n \to +\infty$. Enfin, si $x > 1$, $x^{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc
$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{x^{2n}} = \frac{1}{x^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Ainsi, $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$f_n(x) = 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\} \text{ et } f_n(1) = \frac{1}{2}.$$

3. Si $(f_n)_n$ converge simplement sur une partie A de $\mathbb{R}^+$, c'est nécessairement vers sa limite simple f. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, mais pas la fonction limite simple f (discontinuité en 1), la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne peut pas converger uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons par exemple $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1/n}$. Alors $x_n \in [0;1[$ docn sous réserve d'existence de la borne supérieure ci-dessous
$$\|f_n - f\|_{\infty;[0;1[} \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| = f_n(x_n) = \frac{1/2}{(1/2)^n + 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0$$
   ce qui démontre que $\|f_n - f\|_{\infty;[0;1[}$ ne peut pas tendre vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Par conséquent, $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;1[$.

   Soit $a \in]0;1[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [0;a]$, on a $0 \leq x^{2n}$ donc $1 \leq x^{2n} + 1$ et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{x^{2n}+1} \leq 1$. De plus, par croissance de la fonction $t \longmapsto t^n$ sur $[0;a]$, $x^n \leq a^n$ ce qui implique
$$\forall x \in [0;a], \quad |f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \leq a^n.$$
   Ainsi, la fonction f_n est bornée sur $[0;a]$, et puisque la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit majorant de cet ensemble,
$$0 \leq \|f_n - f\|_{\infty;[0;a]} \leq a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   car $|a| < 1$, ce qui achève de démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0;a]$.

4. Pour tout $n \geq 2$, f_n est continue donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. La suite $(f_n)_{n\geq 2}$ converge simplement sur f, qui est aussi continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$. Soit $n \geq 2$, pour $x \in [0;1]$,
$$|f_n(x)| = \frac{x^n}{x^{2n}+1} \leq \frac{1}{0+1} = 1.$$
   Pour $x \in]1;+\infty[$,
$$|f_n(x)| \leq \frac{x^n}{x^{2n}} = \frac{1}{x^n} \leq \frac{1}{x^2}$$
   car $x > 1$ et $n \geq 2$ donc $x^n \geq x^2$. Ainsi, si l'on pose $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction définie par
$$\varphi(x) = 1 \text{ si } x \in [0;1] \quad \text{ et } \quad \varphi(x) = \frac{1}{x^2} \text{ si } x \in]1;+\infty[,$$
   la fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, donc intégrable sur $[0;1]$, et intégrable sur $[1;+\infty[$ par Riemann, donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie
$$\forall n \geq 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x).$$
   Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que
$$I_n = \int_{\mathbb{R}^+} f_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^+} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

Correction de l'exercice 5

1. Comme $\frac{(n+1)}{n4^n} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut chercher à appliquer la règle de d'Alembert :

$$\frac{(n+2)}{(n+1)4^{n+1}} \frac{n4^n}{n+1} \to \frac{1}{4}, \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

et la rayon de convergence de la série entière est $R = 4$.

2. Par la question précédente, la série converge pour $x \in]-4, 4[$ et diverge pour $|x| > 4$. Pour $x = 4$ ou $x = -4$,

$$|\frac{(n+1)}{n4^n} x^n| = \frac{(n+1)}{n} \sim 1, \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

et la série DVG. Ainsi, le domaine de convergence est l'intervalle ouvert $]-4, 4[$.

3. Soit $x \in]-4, 4[$. En posant $y = x/4$, on a

$$\frac{(n+1)}{n4^n} x^n = \frac{(n+1)}{n} y^n = y^n + \frac{y^n}{n}$$

Or, pour $y \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y^n = \frac{y}{1-y}$$

et

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y}$$

En intégrant et en remarquant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} = 0$ pour $y = 0$, on déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} = -\ln(1-y).$$

Au final,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)}{n4^n} x^n = \frac{x/4}{1-x/4} - \ln(1-x/4) = \frac{x}{4-x} + \ln \frac{4}{4-x}$$