

Rapports: $\bullet$ si: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in]a - \delta, a + \delta[, f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

$\bullet f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \text{ tq } \forall x \geq A, f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

$\bullet f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in]a - \delta, a + \delta[, f(x) > M$

$\bullet f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \geq A, f(x) > M$

$\times f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \stackrel{\text{d\'ef.}}{\Leftrightarrow} \exists \varepsilon \text{ d\'efinie sur un vois. } V \text{ de } a \text{ tq } \forall x \in V, f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$
 $\rightarrow +\infty$ ε d\'efinie sur $]A, +\infty[$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$

$\times f(x) \underset{a}{=} O(g(x)) \Leftrightarrow \exists V \text{ vois de } a \text{ et } \exists M > 0 \text{ tq } \forall x \in V, |f(x)| \leq M |g(x)|$

$\uparrow$ importantes

$\times f(x) \underset{a}{=} o(g(x)) \Leftrightarrow \exists V \text{ vois de } a \text{ et } \exists \varepsilon \text{ d\'efinie sur } V \text{ tq } f(x) = \varepsilon(x)g(x) \forall x \in V$
 et $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$

on a: (1) $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Rightarrow g(x) \underset{a}{\sim} f(x)$

(2) $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Rightarrow f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$

(3) $f(x) = O(g(x)) \not\Rightarrow g = O(|f(x)|)$

ex $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = 1$, $a = +\infty$

on a $\sin(x) \underset{+\infty}{=} O(1)$. En effet $|\sin(x)| \leq 1 \times |1| \forall x \in \mathbb{R}$

Mais: $1 \neq O(\sin(x))$: par l'absurde on suppose

$1 = O(\sin(x))$. Alors $\exists A \in \mathbb{R}$ et $\exists M \geq 0$ tq

$\forall x \geq A, |1| \leq M |\sin(x)|$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tq

$2k\pi \geq A$. Pour un tel k : $|1| \leq M |\sin(2k\pi)| = 0$
 Absurde

(4) $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ alors $f(x) = O(g(x))$

(5) si $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} o(f(x))$ alors f et g sont nulles au vois. de 0.

Ex. 1

- 1) $f/g \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1$ donc oui
 - 2) $f/g \rightarrow \frac{1}{2}$ donc non
 - 3) $f/g \rightarrow 1$ donc oui
 - 4) $x^4 + \frac{1}{x} \sim x^4 \sim f$
- Variante: $x^4 + 1 \sim x^4 \sim f$

Ex. 2

- 1) NON: si on avait $x \sim 0$: $x = (1 + \varepsilon(x)) \times 0$ sur V vois. de 0
D'où $x = 0$ sur V .
- 2) $\frac{x^3}{x^3 + x^2} \rightarrow 1 \neq 0$ donc NON
- 3) $\frac{\sin x - x}{x} = \frac{\sin x}{x} - 1 \rightarrow 1 - 1 = 0$ donc Oui
- 4) $1 - \cos(x) = o(x^2)$?
 $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ donc $1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} - o(x^3)$ devient +
 D'où $\frac{1 - \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2} - o(x)$ ie $\frac{1 - \cos x}{x^2} \rightarrow -\frac{1}{2} \neq 0$ NON
- 5) $g = o(f)$ $h = o(f)$: $g = \underbrace{\varepsilon(x)}_{\text{sur } V} f$ $h = \underbrace{\varepsilon'(x)}_{\text{sur } V'} f$ d'où $g+h = \underbrace{(\varepsilon + \varepsilon')}_{\text{sur } V \cap V'} f$
 ↳ oui
- 6) $g = o(x^2)$ $h = o(x)$ $g = \varepsilon(x) x^2$ $h = \varepsilon'(x) x$
 donc $g+h = (\varepsilon(x) x + \varepsilon'(x)) x$ donc oui
- 7) $\ln(x) = x + o(x)$ donc $= x + o(1)$ donc oui

Ex. 3 . 1) $\ln(1+2x) = 2x + o(x)$
 donc $\frac{\ln(1+2x)}{x \ln(x)} = \frac{2x + o(x)}{x \ln(x)} = \frac{\overbrace{2}^{\rightarrow 0}}{\ln(x)} + \frac{\overbrace{o(1)}^{\rightarrow 0}}{\ln(x)}$
 donc $\ln(1+2x) = o(x \ln(x))$

2) Notons $f(x) = x \ln(x)$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + 3x} \ln(x^2) \sin(x)$

on a: $\left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| = \underbrace{\left| \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x} \right|}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left| \frac{2 \ln(x)}{\ln(x)} \right|}_{= 2} \underbrace{|\sin(x)|}_{\leq 1}$
 $\leq 2 + \varepsilon$ pour $x \gg 1$ → Notée $o(x)$
 donc ≤ 3 pour x assez grand

Donc $g(x) = O(f(x))$.

- on veut que $\frac{g}{f} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$ et $\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ (à justifier)
- Est-ce que $f(x) = O(g(x))$?

on a : $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \frac{1}{\alpha(x)} \times \frac{1}{|\sin x|}$ avec $\frac{1}{\alpha(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$

Par l'absurde supposons $f(x) = O(g(x))$ alors $\exists M \geq 0$ et $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall x > A$, $|f(x)| \leq M \cdot |g(x)|$

Donc $\forall x > A$ et $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $\frac{1}{\alpha(x)} \times \frac{1}{|\sin(x)|} \leq M$
 ie $\frac{1}{|\sin(x)|} \leq M \alpha(x)$.

$\exists A' > A$ t.t. $\forall x > A'$, $M \alpha(x) \leq 3M$ (car $\alpha(x) \rightarrow 2$)

Soit $k \in \mathbb{N}$ t.t. $2\pi k > A'$ et soit $y_n = \frac{1}{n}$

$(\sin(2\pi k + \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers 0

donc $\left| \frac{1}{\sin(2\pi k + \frac{1}{n})} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ d'où contradiction

l'inégalité $\left| \frac{1}{\sin(x)} \right| \leq 3M$ pour $x > A'$.

Ex. 4

1) $\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{x}{\sin x} \times 2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$

Variante $\sin 2x \sim 2x$ et $\sin x \sim x$ donc $\frac{\sin 2x}{\sin x} \sim \frac{2x}{x} = 2$

2) $\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{2(1 - \cos x) - \sin^2 x}{(\sin^2 x)(1 - \cos x)}$
 $= \frac{2(1 - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4))) - (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4))^2}{(x^2 - \frac{x^4}{4!} + o(x^4))(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4))}$
 $= \frac{2(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)) - (x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4))}{(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4))(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4))}$
 $= \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^4)} \xrightarrow{\quad} \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$

3) $(\operatorname{ch}(x))^{1/\operatorname{sh}^2(x)} = \exp\left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)} \ln(\operatorname{ch}(x))\right)$
 $= \exp\left(\frac{\ln(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{(x + o(x^2))^2}\right) = \exp\left(\frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}\right) \rightarrow e^{1/2}$

4) In pole $x = \frac{\pi}{2} + y$ or $x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow y \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{\cos x} &= \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{\pi}y\right)}{-\sin(y)} \\ &= \frac{\frac{2}{\pi}y + o(y)}{-(y + o(y))} \xrightarrow{y \rightarrow 0} -\frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Ex. 5

Notons $f(x) = \frac{x^2 \sqrt{\cosh(x) - 1}}{\sin(\tan^2 x) \ln(1+x)}$

On cherche la limite en 0^- donc l'objectif est d'obtenir un équivalent de chaque facteur en 0 soit de façon directe soit en faisant d'abord un petit DL en 0.

• DL de $\cosh(x)$ en 0: $\cosh(x) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

donc $\sqrt{\cosh(x) - 1} \underset{0}{=} \sqrt{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \sqrt{\frac{x^2}{2}} \times \sqrt{1 + o(1)}$

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 + o(1)} = 1$

donc $\sqrt{\cosh(x) - 1} \underset{0}{\sim} \sqrt{\frac{x^2}{2}} = \frac{|x|}{\sqrt{2}}$

↖ ou x^3
 > 0 si x est proche de 0
donc la racine carrée est bien définie

• $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

• $\tan(x) \underset{0}{=} x + o(x)$ donc $\tan^2(x) \underset{0}{=} x^2 + o(x^2)$

Ainsi $\sin(\tan^2 x) \underset{0}{=} \sin(x^2 + o(x^2))$

Or $\sin(y) \underset{0}{\sim} y$ donc $\sin(x^2 + o(x^2)) \underset{0}{\sim} x^2 + o(x^2) \underset{0}{\sim} x^2$

Finalement (comme les équivalents sont compatibles avec les produits et les quotients) $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2 |x| / \sqrt{2}}{x^3}$

Par conséquent $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 |x|}{\sqrt{2} x^3}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3}{\sqrt{2} x^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

↖ ceci provient du fait que $|x| = -x$ si $x < 0$

Ex. 6

Déterminons le DL de $\sqrt{1+2x}$ à l'ordre 4.

Pour cela, on utilise le DL connu de $(1+y)^\alpha$ qui est

$$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} y^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} y^3 + \dots$$

$$\sqrt{1+y} = (1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{\frac{1}{4}}{2}y^2 + \frac{\frac{3}{8}}{3!}y^3 - \frac{\frac{15}{16}}{4!}y^4 + o(y^4)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 - \frac{5}{128}y^4 + o(y^4)$$

D'où $\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{1}{8}(2x)^2 + \frac{1}{16}(2x)^3 - \frac{5}{128}(2x)^4 + o(x^4)$

$$= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^4 + o(x^4)$$

Ensuite on rappelle les DL connus de $\cos x$ et $\sin x$ en 0

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \quad -\frac{5}{8} - \frac{1}{24} - \frac{16}{24} = -\frac{4 \times 4}{4 \times 6}$$

On obtient :

$$f(x) = \underbrace{1}_{\text{bleu}} + \underbrace{x}_{\text{rouge}} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^4 - \left(\underbrace{1}_{\text{bleu}} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \right) - \left(\underbrace{x}_{\text{rouge}} - \frac{x^3}{6} \right) + o(x^4)$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

2) On a donc $f(x) = \frac{2}{3}x^3 \left(\underbrace{1 - x + o(x)}_{\substack{\text{bleu} \\ x \rightarrow 0 \rightarrow 1}} \right)$

D'où $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{2}{3}x^3$

Remarque : A posteriori on voit qu'un DL à l'ordre 3 était suffisant mais on ne pouvait pas le deviner avant de finir le calcul.

Ex. 7 $f_\lambda:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^\lambda \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé.

1) Rappelons que par définition : $x^\lambda = \exp(\lambda \ln(x))$ ↗ $x \in]0, +\infty[$

Equivalent en $+\infty$: Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$

donc on peut utiliser le DL en 0 de $\sqrt{1+y}$ pour obtenir celui de $\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ en $+\infty$.

$$\sqrt{1+y} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}y + o(y) \text{ donc } \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \underset{+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{d'où } \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \underset{+\infty}{=} \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

on en déduit que : $f_\lambda(x) \underset{+\infty}{\sim} x^\lambda \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}x^{\lambda-1}$

Équivalent en 0 : Ici c'est un équivalent en 0^+ puisque

f_λ est définie sur $]0, +\infty[$.

Quand $x \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$.

On écrit donc
$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 = \sqrt{\frac{1}{x}(1+x)} - 1$$
$$= \sqrt{\frac{1}{x}} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})$$

Ici $\sqrt{1+x} - \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ donc $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$

ce qui donne :

$$f_\lambda(x) \underset{0^+}{\sim} x^\lambda \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\lambda - \frac{1}{2}}$$

2) $f_\lambda(x)$ étant équivalent à $x^{\lambda - \frac{1}{2}}$ en 0^+ , elle sera prolongeable par continuité en 0^+ si et s. si $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\lambda(x)$ existe c-a-d si et s. si $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\lambda - \frac{1}{2}}$ existe (et est finie).

On a : $x^{\lambda - \frac{1}{2}} = \exp\left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \ln(x)\right)$

- Si $\lambda > \frac{1}{2}$ i.e. si $\lambda - \frac{1}{2} > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \ln(x)\right) = -\infty$
d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\lambda - \frac{1}{2}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$

Dans ce cas, f_λ est bien prolongeable.

- Si $\lambda = \frac{1}{2}$ alors $x^{\lambda - \frac{1}{2}} = \exp(0) = 1$
donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\lambda(x) = 1$ et f_λ est encore prolongeable.

- Si $\lambda < \frac{1}{2}$ i.e. $\lambda - \frac{1}{2} < 0$ alors $\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \ln(x) \rightarrow +\infty$
donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\lambda - \frac{1}{2}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty$

Dans ce cas, f_λ n'est pas prolongeable.

Conclusion : le prolongement par continuité est possible si et s. si $\lambda \geq \frac{1}{2}$.

3) Par la question précédente, si $\lambda < \frac{1}{2}$ f_λ n'est pas prolongeable par continuité en 0^+ donc f_λ ne sera pas dérivable non plus.

On suppose donc $\lambda \geq \frac{1}{2}$.

• Regardons d'abord le cas $\lambda = \frac{1}{2}$.

Dans ce cas, par la question précédente, on prolonge f_λ en 0 en posant $f_\lambda(0) = 1$.

On a alors :
$$\frac{f_\lambda(x) - f_\lambda(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) - 1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{2}x + o(x) - \sqrt{x} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2}x + o(x) - \sqrt{x} \right) = \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

Finalement $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_\lambda(x) - f_\lambda(0)}{x - 0} = -\infty$ et f_λ n'est pas dérivable en 0 à droite.

• On suppose maintenant $\lambda > \frac{1}{2}$.

Par la question 2, on prolonge f_λ en 0 en posant $f_\lambda(0) = 0$.

On a donc
$$\frac{f_\lambda(x) - f_\lambda(0)}{x - 0} = \frac{x^\lambda \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)}{x}$$

On pose $\lambda = \alpha + \frac{1}{2}$ de sorte que $\alpha > 0$ puisque $\lambda > \frac{1}{2}$.

Cela donne
$$\frac{f_\lambda(x) - f_\lambda(0)}{x - 0} = \frac{x^\alpha x^{1/2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right)}{x}$$

$$= x^\alpha \cdot \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x} = \frac{x^\alpha (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{x (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}$$

$$= \frac{x^\alpha (x+1 - x)}{x (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \frac{x^{\alpha-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\sim x^{\alpha-1} \text{ car } \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+0} = 1$$

On écrit $x^{\alpha-1} = \exp((\alpha-1) \ln(x))$ et on regarde si $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1}$ existe. De même qu'à la question 2, on trouve que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1}$ existe si et s. si $\alpha-1 \geq 0$

i.e. $\lambda - \frac{3}{2} \geq 0$ i.e. $\lambda \geq \frac{3}{2}$

Conclusion : f est dérivable en 0^+ si et s. si $\lambda \geq \frac{3}{2}$.