

**Feuille d'exercices n° 2**

DÉTERMINANTS

**Exercice 1.** Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & -1 \\ -14 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 2 & -2 \\ 28 & -2 & -2 & 35 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $AB$  puis  $\det B$ .

**Exercice 3.** Soient  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ , et  $M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$ .

Calculer  ${}^tMM$ . En déduire la valeur du déterminant de  $M$ .

**Exercice 4.** Soient  $k$  et  $a$  deux réels. Calculer les déterminants des matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & -1 \\ 1 & k^2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k+2 \\ 1 & k+2 & 2k+4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \cos a & 1 & -\sin a \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5.** On désigne par  $I_n$  la matrice identité de taille  $n$ . Déterminer les nombres complexes  $\lambda$  pour lesquels la matrice  $A - \lambda I_n$  n'est pas inversible, dans les deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 6.** Montrer que les matrices suivantes ont un déterminant nul :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 7.** À l'aide du pivot de Gauss, calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

**Exercice 8.** Calculer le déterminant de la matrice suivante avec la formule de développement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 9.** Soient  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & c & c & c \\ a & d & d & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & c^2+a^2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & n & \cdots & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ n & \cdots & \cdots & n & n \end{pmatrix}.$$

**Exercice 10. Déterminant de Vandermonde**

Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Démontrer l'égalité suivante :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

**Exercice 11.** Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 12.** Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ a & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $D_n = \det A_n$ .

1. Calculer  $D_2$  et  $D_3$ .
2. Calculer  $D_n$  en fonction de  $n$  (on pourra procéder de façon directe ou par récurrence).
3. Calculer le rang de la matrice  $A_n$  en fonction de  $a$ .

**Exercice 13.** Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère la matrice tridiagonale, à coefficients réels, de taille  $n$ ,

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note  $D_n$  son déterminant.

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$ .
2. Déterminer  $D_n$  en fonction de  $n$  (pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ).
3. La matrice  $A_n$  est-elle inversible ?

**Exercice 14.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice antisymétrique, i.e  ${}^tA = -A$ .

Montrer que si  $A$  est inversible, alors  $n$  est nécessairement pair.

**Exercice 15.** Soit  $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont les coefficients sont des entiers impairs.

Montrer que  $\det A$  est un entier, et que celui-ci est divisible par  $2^{n-1}$ .

**Exercice 16.** On désigne par  $\mathbb{K}$  le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $AB = 0$ ,  $A \neq 0$  et  $B \neq 0$ .

Montrer que  $\det(A) = \det(B) = 0$ .

**Exercice 17.** On note  $GL_n(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid M \text{ inversible et } M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})\}$ . Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . Montrer que  $M \in GL_n(\mathbb{Z})$  si et seulement si  $\det M = \pm 1$ .

**Exercice 18.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). On note  $\text{Com}(A)$  la comatrice de  $A$ .

1. Montrer que si  $A$  est de rang  $n$ , alors  $\text{Com}(A)$  est de rang  $n$ .
2. Montrer que si  $A$  est de rang  $n - 1$ , alors  $\text{Com}(A)$  est de rang 1.
3. Montrer que si  $A$  est de rang inférieur ou égal à  $n - 2$ , alors  $\text{Com}(A)$  est de rang 0.