Feuille d'exercices numéro 9
Matrices

Dans cette feuille, tous les espaces vectoriels considérés ont $\mathbf{R}$ pour corps de base. On note $\mathscr{M}_{m,n}$ l'espace vectoriel des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients réels.

Exercice 9.1
Soit $H \subset \mathscr{M}_{3,3}$ l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a+b & 0 & c \\ 0 & b+c & 0 \\ c+a & 0 & a+b \end{pmatrix},$$

où a, b et c sont des réels. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,3}$ et en déterminer une base.

Exercice 9.2
Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Parmi les produits AB, BA, AC, CA, BC, CB, lesquels ont un sens ? Calculez-les.

Exercice 9.3
Soient a, b deux réels, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Quelles sont les matrices de $\mathscr{M}_{2,2}$ qui commutent avec A ?

Exercice 9.4
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A^2 = 2I - A$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 9.5
Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $B = A - I$. Calculer B^n pout tout entier $n \in \mathbf{N}$.
2. Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 9.6
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible en calculant explicitement son inverse.

Exercice 9.7
Soient m et n deux entiers, et soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}$ et $B \in \mathscr{M}_{n,m}$ deux matrices telles que $AB = I_m$ et $BA = I_n$. Montrer que $m = n$.

Exercice 9.8

Soient n un entier, $S_n \subset \mathscr{M}_{n,n}$ l'ensemble des matrices symétriques (i.e. qui vérifient $A = {}^tA$), et $A_n \subset \mathscr{M}_{n,n}$ l'ensemble des matrices antisymétriques (i.e. qui vérifient $A = -{}^tA$).

1. Montrer que S_n et A_n sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{n,n}$.
2. Montrer que $\mathscr{M}_{n,n} = S_n \oplus A_n$.

Exercice 9.9

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et soit (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soit f l'unique endomorphisme de E qui vérifie

$$f(e_1) = -7e_1 - 6e_2, \quad f(e_2) = 8e_1 + 7e_2, f(e_3) = 6e_1 + 6e_2 - e_3.$$

Déterminer l'application linéaire $f \circ f$, puis montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 9.10

On dit qu'une matrice carrée M est *nilpotente* s'il exite un entier $k \geqslant 1$ tel que $M^k = 0$. On dit qu'une matrice carrée M est *racine de l'unité* s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $M^k = I$.

1. Soient n un entier et $A, B \in \mathscr{M}_{n,n}$. Montrer que si AB est nilpotente, alors BA est nilpotente.
2. Soient n un entier et $A, B \in \mathscr{M}_{n,n}$. Montrer que si AB est racine de l'unité, alors BA est racine de l'unité.

Exercice 9.11

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose

$$f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3, f_2 = 4e_1 + 7e_2 - 6e_3, f_3 = -3e_1 - 5e_2 + 5e_3.$$

1. Montrer que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E, et écrire la matrice de passage de $\underline{e}$ vers $\underline{f}$.
2. Soit $v \in E$ le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{f}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{e}$?
3. Soit $w \in E$ le vecteur de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{e}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{f}$?

Exercice 9.12

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ deux matrices à coefficients réels. Soit E un espace vectoriel de dimension 3, et soient (e_1, e_2, e_3) et (e'_1, e'_2, e'_3) deux bases de E ; soit F un espace vectoriel de dimension 1 et f_1 un vecteur non nul de F. On suppose que la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e'_1, e'_2, e'_3) est la matrice P.

1. Calculer la matrice P^{-1}
2. Soit u l'application linéaire de E vers F dont la matrice est A dans les bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1). Donner la matrice de u dans les bases (e'_1, e'_2, e'_3) et $(5f_1)$.

Exercice 9.13

Soit E un espace vectoriel et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\underline{e}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_2 - e_3$ et $f_3 = e_3 - e_1$.

1. Montrer que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.
2. Calculer la matrice de u dans $\underline{f}$.
3. Calculer A^{100}.