Feuille d'exercices numéro 5
Espaces vectoriels, familles libres et génératrices

Exercice 5.1
Parmi les sous-ensembles de $\mathbf{R}^2$ ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?
1. L'ensemble $D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 2x - 3y = 0\}$.
2. L'ensemble $D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 2x - 3y = 1\}$.
3. L'ensemble $D_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0\}$.
4. L'ensemble $D_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$.
5. L'ensemble $D_5 = \{(\alpha, 2\alpha) \ : \ \alpha \in \mathbf{R}\}$.
6. L'ensemble $D_6 = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$.
7. L'ensemble $D_7 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ 9x^2 + 4y^2 - 12xy = 0\}$.

Exercice 5.2
Parmi les sous-ensembles de $\mathbf{R}^3$ ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?
1. L'ensemble $E_1 = \{(\alpha, \beta, 0) \ : \ \alpha \in \mathbf{R}, \beta \in \mathbf{R}\}$.
2. L'ensemble $E_2 = \{(x, y, z) \ : \ xy + yz + z + x = 0\}$.
3. L'ensemble $E_3 = \{(x, y, z) \ : \ x + y + z = 0\}$.
4. L'ensemble $E_4 = \{(x, y, z) \ : \ x + y + z = 1\}$.
5. L'ensemble $E_5 = \{(x, y, z) \ : \ \sin(x) + \sin(y) + \sin(z) = 0\}$.

Exercice 5.3
Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}$?

Exercice 5.4
Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?
1. Dans $\mathbf{R}^2$: (a) $((3, 2), (4, -1))$ (b) $((3, 2), (4, -1), (5, -2))$.
2. Dans $\mathbf{R}^3$: (a) $((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$ (b) $((1, 1, 0), (1, 2, 1), (0, 1, 1))$

Exercice 5.5
Comment choisir $\alpha \in \mathbf{R}$ pour que la famile suivante soit libre dans $\mathbf{R}^4$?

$$((3, 1, -4, 6), (1, 1, 4, 4), (1, 0, -4, \alpha))$$

Exercice 5.6
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et x, y, z trois vecteurs de $\mathbf{R}^n$. On pose $u = x + y$, $v = x + z$ et $w = y + z$.
1. Montrer que la famille (x, y, z) est libre si et seulement si la famille (u, v, w) est libre.
2. Montrer que le sous-espace engendré par (x, y, z) est égal au sous-espace engendré par (u, v, w).

Exercice 5.7
Dans $\mathbf{Q}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, -2, 3)$.
1. La famille (u, v, w) est-elle libre ?
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $\{u, v, w\}$. Donner une base de F.
3. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{Q}^3 \ : \ x + 2y + z = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{Q}^3$, puis que $F = G$.

Exercice 5.8
Montrer que les deux familles de vecteurs suivantes

$$((1,2,-1,3),(2,4,1,-2),(3,6,3,-7))$$

$$((1,2,-4,11),(2,4,-5,14))$$

engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^4$.

Exercice 5.9
Soit $n \in \mathbf{N}$, et soient $e_1, \ldots, e_k$ des vecteurs de $\mathbf{R}^n$. On note $\Phi : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ l'application définie pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbf{R}^k$ par

$$\Phi[(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)] = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k.$$

1. Montrer que $(e_1, \ldots, e_k)$ est générateur de $\mathbf{R}^n$ si et seulement si Φ est une surjection.
2. Montrer que $(e_1, \ldots, e_k)$ est libre si et seulement si Φ est une injection.

Exercice 5.10

1. Donner un exemple d'entier n et de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ dont la réunion n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$, et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ tels que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$. Montrer que $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5.11
Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel R.

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$, et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) = F \cap (G + (F \cap H))$.

Exercice 5.12
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soit (u, v, w) une famille libre de $\mathbf{R}^n$. On note

$$F = \{x \in \mathbf{R}^n \ : \exists (\alpha, \beta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}, x = (\alpha + \beta)u + (\alpha + 2\beta)v + (\alpha + 3\beta)w\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.
2. Les vecteurs u, v et w appartiennent-ils à F ?
3. Donner une base de F.

Exercice 5.13
Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ l'espace des applications de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

1. Rappeler la définition de la structure d'espace vectoriel usuelle sur E.
2. Les sous-ensembles suivants de E sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
   (a) L'ensemble des applications linéaires ?
   (b) L'ensemble des applications continues ?
   (c) L'ensemble des applications de classe C^∞ ?
   (d) L'ensemble des applications surjectives ?
   (e) L'ensemble des applications f telles que $f^{-1}(\mathbf{R}^*)$ est fini ?

Exercice 5.14
Dans l'espace E de l'exercice précédent, montrer que les familles suivantes sont libres (par abus de notation, on note parfois dans la liste qui suit $f(x)$ pour signifier f)

1. $(\sin, \cos)$,
2. (x, x^2, x^3),
3. (e^x, e^{2x}, e^{3x}),
4. (e^{ax}, e^{bx}, e^{cx}), où a, b et c sont trois réels distincts.