Feuille d'exercices numéro 4
FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 4.1
Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbf{R}[X]$:

$$A(X) = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} \qquad B(X) = \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} \qquad C(X) = \frac{1}{X(X-1)^2}$$

$$D(X) = \frac{4}{(X^2-1)^2} \qquad E(X) = \frac{X^4-5X^3+10X^2-8X-1}{(X-1)^3(X-2)} \qquad F(X) = \frac{1}{X^n(X-1)}$$

$$G(X) = \frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2} \qquad H(X) = \frac{16807}{(X-1)^5(X^2+2X+4)} \qquad I(X) = \frac{1}{X^4-1}$$

$$J(X) = \frac{X}{X^4+1} \qquad K(X) = \frac{X^3}{(X+1)^2(X-1)^2} \qquad L(X) = \frac{(X^2-X+1)^2}{X^2(X-1)^2}$$

Exercice 4.2
Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbf{C}[X]$:

$$A(X) = \frac{1}{X^2+X+1} \quad B(X) = \frac{X}{(X-1)(X^2+1)^2} \quad C(X) = \frac{1}{(X+1)(X^3+1)} \quad D(X) = \frac{P(X)}{X^n-1},$$

où $P \in \mathbf{C}[X]$ est un polynôme vérifiant $\deg P < n$.

Exercice 4.3
Soit P un polynôme complexe de degré n ayant n racines complexes distinctes notées $x_1, \ldots, x_n$. Soit a un complexe distinct de toutes les racines de P.

1. En utilisant des fractions rationnelles, montrer les formules

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k - a} = -\frac{P'(a)}{P(a)},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x_k - a)^2} = \frac{P'(a)^2 - P(a)P''(a)}{P(a)^2},$$

2. On suppose que toutes les racines de P sont réelles. Montrer que $(P')^2 - PP''$ n'a pas de racines réelles.

Exercice 4.4
Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbf{C}(X)$ telle que $F(X)^2 = X$.

Exercice 4.5

1. En décomposant en élements simples la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{X(X+1)}$, calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

2. Calculer selon le même modèle les sommmes suivantes
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1+k^2+k^4} \qquad \sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{k(k^2-4)}$$

Exercice 4.6
On note $F(X) = \dfrac{1}{X(X^2+1)}$. Calculer la dérivée d'ordre 28 de F.

Exercice 4.7
Soit $F(X) = \dfrac{1}{X^2+1}$. Montrer que pour tout entier n il existe un polynôme $P_n(X)$ tel que
$$F^{(n)}(X) = \frac{P_n(X)}{(X^2+1)^{n+1}}$$
et déterminer les zéros de P_n.

Exercice 4.8
Donner une condition nécessaire et suffisante sur une fraction rationnelle $F \in \mathbf{C}(X)$ pour qu'il existe $G \in \mathbf{C}(X)$ telle que $F = G'$.

Exercice 4.9 Soient a et b deux réels distincts et $F(X) = \dfrac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. En utilisant la formule de Taylor en a pour $f(X) = (X-a)^n F(X)$, décomposer F en éléments simples sur $\mathbf{R}$.

Exercice 4.10
Soit $P \in \mathbf{C}_n[X]$ ($n \geq 2$) ayant n racines distinctes : $x_1, \ldots, x_n$.

1. Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)} = 0$ (on pourra commencer par décomposer $1/P$ en éléments simples).
2. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{P'(x_i)}$ pour $0 \leq k \leq n-1$.

Exercice 4.11
Trouver les fractions $F \in \mathbf{R}(X)$ telles que : $F(X+1) - F(X) = \dfrac{X+3}{X(X-1)(X+1)}$.