Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2014-2015
Cursus préparatoire, semestre 2 : algèbre

Feuille d'exercices numéro 3
POLYNÔMES (SUITE)

Sauf précision contraire, tous les polynômes considérés seront à coefficients complexes.

Exercice 3.1
Soit le polynôme réel $P(X) = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + aX^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Déterminer a.
2. Montrer que -1 est racine double de P.
3. Montrer que j est racine multiple de P.
4. Factoriser P en facteurs irréductibles, d'abord dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$.

Exercice 3.2
Pour $a \in \mathbf{C}$, on pose $P_a(X) = 2X^3 + 3X^2 + 6X + a$.

1. Déterminer un PGCD de P_a et P'_a.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de a le polynôme P_a admet-il une racine double ? Pour chacune de ces valeurs, donner une factorisation de P_a en facteurs irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$.

Exercice 3.3
Soit $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, et le polynôme $P(X) = (\cos a + X \sin a)^n$. Calculer le reste de la division euclidienne de $P(X)$ par $X^2 + 1$.

Exercice 3.4
Soit θ un réel, et n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer (sans le calculer) que le reste de la division euclidienne de $X^n \sin\theta - X \sin n\theta + \sin(n-1)\theta$ par $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ est nul.

Exercice 3.5
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et considérons le polynôme à coefficients réels $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + c$. Peut-on choisir a, b, c pour que P admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

Exercice 3.6
Soient A, B et C des polynômes. Montrer que si A et B divisent C, et que A et B sont premiers entre eux, alors AB divise C.

Exercice 3.7
Montrer la formule, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\prod_{k=0}^{n-1} (X^2 - 2X\cos(2k\pi/n) + 1) = (X^n - 1)^2.$$

Exercice 3.8
Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, et soient $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes (pas nécessairement distincts). On pose, pour k compris entre 1 et n :

$$e_k = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n} z_{j_1} z_{j_2} \cdots z_{j_k}.$$

Voici quelques valeurs des e_k :

$$e_0 = 1, \quad e_1 = z_1 + z_2 + \cdots + z_n, \quad e_2 = (z_1z_2 + z_1z_3 + \cdots + z_1z_n) + (z_2z_3 + \cdots + z_2z_n) + \cdots + (z_{n-1}z_n),$$

$$e_{n-1} = z_2 \cdots z_n + z_1z_3 \cdots z_n + \cdots + z_1 \cdots z_{n-1}, \quad e_n = z_1z_2 \cdots z_n.$$

1. Pour $n = 2$ (resp. $n = 3$), écrire explicitement e_1, e_2 (resp. e_1, e_2, e_3) et montrer que

$$(X - z_1)(X - z_2) = X^2 - e_1X + e_2 \qquad \big(\text{resp. } (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) = X^3 - e_1X^2 + e_2X - e_3\big).$$

2. Pour n quelconque, montrer que l'on a :

$$\prod_{j=1}^{n}(X - z_j) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k e_k X^{n-k},$$

3. Sachant que $2i$ et $3-i$ sont des racines de $X^3+(i+1)X^2-(8+4i)X-4+28i$, calculer la troisième racine complexe de ce polynôme.
4. Pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, déterminer sans calcul $\sum_{1\leq j\leq n} e^{2\pi ij/n}$ et $\sum_{1\leq j<k\leq n} e^{2\pi i(j+k)/n}$.

Exercice 3.9
Soit $P(X) = X^4 + 12X - 5$. Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$, en sachant qu'il admet deux racines dont la somme vaut 2.

Exercice 3.10
Soit $P(X) = X^6 - 3X^5 + X^4 + 4X^2 - 12X + 4$. Décomposer ce polynôme en facteurs irréductibles sur $\mathbf{R}[X]$, en sachant qu'il admet deux racines qui sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 3.11
Déterminer λ pour que le polynôme $P(X) = X^4 - X^3 + \lambda X^2 + 6X - 4$ admette deux racines dont le produit vaut 2.

Exercice 3.12
Quels sont les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Exercice 3.13
Montrer que le polynôme $P(X) = X^{163} - 24X^{57} - 6$ possède au moins une racine réelle, mais ne possède pas de racine rationnelle.

Exercice 3.14
Soit n et m deux entiers. Calculer le PGCD unitaire des polynômes $X^n - 1$ et $X^m - 1$.

Exercice 3.15
Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ défini par $P(X) = X^3 + 3X^2 + 2X + i$.

1. Déterminer les racines du polynôme dérivé P'.
2. Montrer que P n'admet aucune racine réelle.
3. Déduire des questions précédentes que P admet 3 racines dans $\mathbf{C}$, que l'on notera α, β et γ.
4. Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

Exercice 3.16
On note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α_5 les racines du polynôme $P(X) = X^5 - 29X^4 + 117X^3 - 11X^2 + 4X + 1$. Écrire le polynôme unitaire de degré 5 dont les racines sont $1/\alpha_1, 1/\alpha_2, 1/\alpha_3, 1/\alpha_4$ et $1/\alpha_5$.

Exercice 3.17

1. Soient p_1, p_2, p_3 et p_4 quatre entiers. Trouver deux entiers q_1 et q_2 tels que $(p_1^2+p_2^2)(p_3^2+p_4^2) = q_1^2+q_2^2$.
   Indication : *manipuler les nombres complexes $p_1 + ip_2$ et $p_3 + ip_4$.*
2. Soient P_1, P_2, P_3 et P_4 quatre polynômes de $\mathbf{R}[X]$. En s'inspirant de la question précédente, trouver deux polynômes réels Q_1, Q_2 tels que $(P_1^2 + P_2^2)(P_3^2 + P_4^2) = Q_1^2 + Q_2^2$.
3. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
   (a) Pour tout réel x, on a $P(x) \geqslant 0$.
   (b) Il existe Q_1, Q_2 dans $\mathbf{R}[X]$ tels que $P = Q_1^2 + Q_2^2$.