Fonctions trigonométriques

Jérôme Germoni

Novembre 2011

1 Première étude : par équation différentielle

1.0.1 Définition

On s'inspire de la définition de l'exponentielle vue en terminale.

Théorème 1 (admis) *Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f'' = -f$, $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.*

Définition *On appelle* cosinus *et on note* cos *la fonction du théorème. On appelle* sinus *et on note* sin *l'opposée de la dérive du cosinus :* $\sin = -\cos'$.

Comme le sinus est la dérivée d'une fonction deux fois dérivable, elle est dérivable. Il en résulte : $\sin' = \cos'' = -\cos$. En particulier, $\sin'$ est dérivable et : $\sin'' = -\cos' = -\sin$. En d'autres termes, cos et sin sont solutions de la même équation différentielle $f'' + f = 0$.

On en déduit par récurrence que cosinus et sinus sont indéfiniment dérivables.

Remarquons que le théorème implique immédiatement la *parité* du cosinus. En effet, la fonction $g : t \mapsto \cos(-t)$ est deux fois dérivable, on a : $g'(t) = -\cos'(-t)$ et $g''(t) = \cos''(-t) = -\cos(-t) = -g(t)$ pour tout t réel, puis on vérifie que : $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$. Il en résulte que $g = \cos$. On en déduit immédiatement que sa dérivée est impaire.

On obtient aussi sans peine la formule classique :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

En effet, la dérivée de la fonction $h : t \mapsto \cos^2 t + \sin^2 t - 1$ est nulle et sa valeur en 0 est 0. Par le théorème des accroissements finis, h est la fonction nulle.

Résumons.

Lemme 1 *La fonction cosinus est paire, la fonction sinus est impaire. Toutes deux sont indéfiniment dérivables et on a :*

$$\cos' = -\sin, \quad \sin' = -\cos, \quad \cos^2 + \sin^2 = 1.$$

1.0.2 Formules d'addition

Proposition 1 *On a, pour tous réels t et u :*

$$\begin{cases} \cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u, & \sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u, \\ \cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u, & \sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u. \end{cases}$$

On démontre pour commencer la première égalité. Comme le changement de variables $t' = t - u$, $u' = u$ est bijectif, il suffit de démontrer que pour tous réels t et u, on a :

$$\cos(t) = \cos(t-u)\cos u - \sin(t-u)\sin u.$$

Fixons u dans $\mathbb{R}$ et considérons la fonction :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \cos(t-u)\cos u - \sin(t-u)\sin u.$$

La fonction g est deux fois dérivable et on a pour tout t :

$$g'(t) = -\sin(t-u)\cos u - \cos(t-u)\sin u, \quad g''(t) = -\cos(t-u)\cos u + \sin(t-u)\sin u = -g(t).$$

De plus, on a :

$$g(0) = \cos(-u)\cos u - \sin(-u)\sin u = 1, \quad g'(0) = -\sin(-u)\cos u - \cos(-u)\sin u = 0,$$

d'où par le théorème admis ci-dessus : $g = \cos$. Ceci prouve la première formule.

On obtient la formule pour $\sin(t+u)$ en fixant u et en dérivant la première par rapport à t ; enfin, les deux formules suivantes résultent de la substitution de $-u$ à la place de u et des propriétés de parité vues ci-dessus.

1.0.3 Définition de π

Lemme 2 *La fonction cosinus atteint la valeur zéro sur l'ensemble des réels positifs.*

Supposons que le cosinus ne prenne pas la valeur 0 sur $\mathbb{R}^+$. Par continuité et par le théorème des valeurs intermédiaires, cela signifie que le cosinus est strictement positif sur $\mathbb{R}^+$. Alors, le sinus est strictement croissant sur $\mathbb{R}^+$ et on a, pour tout $t \geq 1$: $\sin t \geq \sin 1$, ou encore : $\cos'(t) + \sin 1 \leq 0$. La fonction $t \mapsto \cos(t) + t \sin 1$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ donc on a :

$$\forall t \geq 1, \quad \cos t + t \sin 1 \leq \cos 1 - 1.$$

Puisque $\sin 1 > 0$, cela entraîne : $\lim_{+\infty} \cos = -\infty$, contredisant l'inégalité $\cos \geq -1$ qui résulte du paragraphe précédent. Notre hypothèse est absurde et le cosinus s'annule sur $\mathbb{R}^+$.

Définition *On définit le réel π par :*

$$\pi = 2 \inf\{t \in \mathbb{R}^+, \ \cos t = 0\}.$$

Montrons que le cosinus s'annule en $\pi/2$, ce qui revient à dire que la borne inférieure est un minimum. Soit (t_n) une suite de nombres réels positifs tels que $\cos t_n = 0$ et qui tend vers $\pi/2$. Par continuité du cosinus, on a :

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos \lim_{n \to +\infty} t_n = \lim_{n \to +\infty} \cos t_n = 0.$$

Par minimalité de π, le cosinus est strictement positif sur $[0, \pi/2[$. Par suite, le sinus est strictement croissant sur cet intervalle, si bien que $\sin \pi/2 > 0$. Avec la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on en déduit : $\sin \pi/2 = 1$. Écrivons les formules d'addition avec $u = \pi/2$, puis avec $u = \pi$:

Lemme 3 *Soit t un réel. On a :*

$$\begin{array}{ll}
\cos \frac{\pi}{2} = 0, & \sin \frac{\pi}{2} = 1, \\
\cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin t, & \sin(t + \frac{\pi}{2}) = \cos t, \\
\cos(t - \frac{\pi}{2}) = \sin t, & \sin(t - \frac{\pi}{2}) = -\cos t, \\
\cos \pi = -1, & \sin \pi = 0, \\
\cos(t + \pi) = -\cos t, & \sin(t + \pi) = -\sin t, \\
\cos(t + 2\pi) = \cos t, & \sin(t + 2\pi) = \sin t.
\end{array}$$

En particulier, ajouter $\pi/2$ à l'argument du cosinus ou du sinus, c'est la même chose que dériver ; retrancher $\pi/2$, c'est intégrer. Pouvez-vous trouver une explication simple en termes d'exponentielles complexe ?

1.0.4 Variations

Par définition de π, le cosinus est strictement positif sur $[0, \pi/2[$ donc ($\sin' = \cos$) le sinus est strictement croissant sur $[0, \pi/2]$ donc ($\sin 0 = 0$) le sinus est strictement croissant sur $]0, \pi/2[$ donc ($\cos' = -\sin$) le cosinus est strictement décroissant sur $[0, \pi/2]$. Avec les formules d'addition, on en déduit les variations du cosinus et du sinus sur un intervalle de longueur 2π, puis sur $\mathbb{R}$ entier.

1.0.5 Résolution de quelques équations

On déduit du tableau de variations la proposition suivante.

Proposition 2 (i) *Soit a un réel compris entre -1 et 1. Il existe un unique réel $t_0 \in [0, \pi]$ tel que $\cos t_0 = a$ et, pour t réel quelconque, on a :*

$$\cos t = a \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ t = \pm t_0 + 2k\pi.$$

(ii) *Soit b un réel compris entre -1 et 1. Il existe un unique réel $t_1 \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin t_1 = b$ et, pour t réel quelconque, on a :*

$$\sin t = b \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ t = t_1 + 2k\pi \text{ ou } t = \pi - t_1 + 2k\pi.$$

Théorème 2 *Soit a et b deux nombres réels tels que $a^2 + b^2 = 1$. Il existe un réel t, unique à un multiple de 2π près, tel que $a = \cos t$ et $b = \sin t$.*

Existence. Soit $t_0 \in [0, \pi]$ tel que $\cos t_0 = a$. Si on a : $\sin(t_0) = b$, c'est gagné. Sinon, on a quand même :

$$|b| = \sqrt{1 - a^2} = \sqrt{1 - \cos^2 t_0} = |\sin t_0|,$$

si bien que $b = -\sin t_0 = \sin(-t_0)$.

Unicité. Supposons que t et t' conviennent, on veut montrer que $t' - t$ est un multiple de 2π. En vertu des propositions précédentes, t' vaut à la fois $\pm t + 2k\pi$ d'une part, et $t + 2\ell\pi$ ou $\pi - t + 2\ell\pi$ d'autre part, où k, ℓ sont des entiers. On est donc dans l'une des situations suivantes :

- si $t' = t + 2k\pi$ ou $t' = t + 2\ell\pi$, rien à ajouter ;
- si $t' = -t + 2k\pi$ et $t' = \pi - t + 2\ell\pi$, alors $1 = 2(k - \ell)$, ce qui est absurde.

1.0.6 Tangente et arc-tangente

Il est commode de définir, partout où le cosinus ne s'annule pas, la tangente comme quotient du sinus par le cosinus :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

La troisième construction ci-dessous est fondée sur l'étude de la fonction réciproque de la tangente, qu'on définit dans le cadre actuel.

La tangente est dérivable sur son ensemble de définition et on a :

$$\tan' = \frac{\sin' \cos - \cos' \sin}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

En particulier, la tangente est strictement croissante sur tout intervalle où elle est définie. Par exemple, elle établit une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur son image. On voit facilement que la limite en $(-\pi/2)^+$ est $-\infty$ et que la limite en $(\pi/2)^-$ est $+\infty$, ce qui entraîne que

Proposition 3 *La tangente induit une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$.*

Définition *La fonction arc-tangente, notée* $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\pi/2, \pi/2\right[$*, est la fonction réciproque de la restriction de la tangente à* $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

Proposition 4 *L'arc-tangente est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \arctan' \alpha = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

2 Deuxième étude : paramétrage du cercle par longueur d'arc

On oublie tout ce qui précède pour donner une construction « géométrique » des fonctions trigonométriques. Le prérequis essentiel est un peu de calcul intégral mais la construction ne prend un sens que si on sait ce qu'est une courbe paramétrée, la vitesse, la longueur.

2.1 Définition du sinus

2.1.1 Vitesse et longueur : motivation

Considérons une courbe paramétrée, c'est-à-dire une application définie sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$:

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

On suppose γ de classe $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire que x et y sont des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que x' et y' sont continues.

Par définition, le vecteur-vitesse à l'instant $t \in [a, b]$ est : $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$. Lorsque le temps passe de t à $t + \mathrm{d}t$, où $\mathrm{d}t$ est un « petit » nombre réel [1], les coordonnées passent de $(x(t), y(t))$ à $\gamma(t) = (x(t) + \mathrm{d}x(t), y(t) + \mathrm{d}y(t))$ (ici, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x(t)$ est la variation de l'abscisse entre les instant t et $t + \mathrm{d}t$, *idem* pour $\mathrm{d}y$). La notion de dérivée permet d'affirmer qu'au premier ordre en $\mathrm{d}t$, on peut identifier $\mathrm{d}x$ et $x'(t)\mathrm{d}t$. Plus précisément, on a : $\mathrm{d}x(t) = x'(t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t)$.

On veut évaluer la longueur de la courbe. Entre t et $t + \mathrm{d}t$, on l'identifie au premier ordre au segment reliant $\gamma(t)$ et $\gamma(t + \mathrm{d}t)$. Sa longueur est donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

La longueur totale de la courbe est la « somme » des longueurs de ces morceaux d'arcs, ce qui conduit à la...

Définition *La longueur de la courbe* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ *est :*

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, \mathrm{d}t = \int_a^b ||\gamma'(t)||\mathrm{d}t.$$

2.1.2 Paramétrage du demi-cercle

Considérons le demi-cercle D de $\mathbb{R}^2$ défini par les équations :

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x \geq 0.$$

Cela signifie qu'un point de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ appartient à D si, et seulement si ces égalités sont satisfaites.

1. La notion de « petit » nombre réel n'a pas de sens mais ce qui suit a un sens en divisant par $\mathrm{d}t$ et en passant à la limite $\mathrm{d}t \to 0$.

La projection d'un point de D sur l'axe des ordonnées établit une bijection entre D et un segment. En effet, la résolution d'une équation très simple prouve que l'application

$$\gamma : [-1,1] \to D, \quad y \mapsto (\sqrt{1-y^2}, y)$$

est bijective. On en déduit un paramétrage de l'arc de demi-cercle par l'intervalle $[-1,1]$. Le vecteur vitesse en $y \in]-1,1[$ est :

$$\gamma'(y) = \left(-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, 1\right) \quad \text{et } ||\gamma'(y)||^2 = \frac{y^2}{1-y^2} + 1 = \frac{1}{1-y^2}.$$

2.1.3 Longueur d'un arc de demi-cercle

Soit $y \in]-1,1[$. La longueur de la portion d'arc de demi-cercle comprise entre le point $\gamma(0) = (1,0)$ et le point $\gamma(y)$ est :

$$\Phi(y) = \int_0^y ||\gamma'(t)||\mathrm{d}t = \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Remarquons qu'on décide que la longueur est calculée normalement pour $y \geq 0$ mais qu'elle est comptée avec un signe $-$ lorsque $y < 0$. Il s'agit en quelque sorte d'une longueur algébrique (ce qui permet d'ailleurs de les ajouter ou les soustraire comme les angles).

En tant que primitive d'une fonction continue, Φ est dérivable sur $]-1,1[$ et on a, pour y dans cet intervalle :

$$\Phi'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} > 0.$$

On en déduit en particulier que Φ est strictement croissante ; grâce à sa continuité, on peut affirmer avec le théorème des valeurs intermédiaires que Φ établit une bijection de

$$]-1,1[\quad \text{sur} \quad \left] \lim_{-1^+} \Phi, \lim_{1^-} \Phi \right[.$$

2.1.4 Limites de Φ en ± 1

On a, pour $t \in [0,1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}}.$$

On en déduit, pour $y \in [0,1[$:

$$\Phi(y) \leq \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = \left[-2\sqrt{1-t}\right]_0^y = 2 - 2\sqrt{1-y} \leq 2.$$

Il en résulte que Φ est majorée et que sa limite en 1^- est finie.

Définition *On appelle π le réel :*

$$\pi = 2 \lim_{y \to 1^-} \Phi(y).$$

Remarquons que par construction, $\pi/2$ est la longueur d'un quart de cercle. On note encore Φ le prolongement par continuité de Φ à $[-1,1]$. On déduit de ce qui précède la proposition suivante :

Proposition 5 *La fonction $\Phi : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ est une bijection croissante.*

Définition *On appelle sinus et on note* $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ *la bijection réciproque de Φ. (La notation traditionnelle de Φ est* arcsin*, on l'appelle arc-sinus.)*

Comme Φ est impaire, le sinus l'est également.

2.1.5 Cosinus sur $]-\pi/2, \pi/2[$

On a vu que Φ est dérivable sur $]-1, 1[$ et que sa dérivée n'est pas nulle. On en déduit que sa fonction réciproque est aussi dérivable.

Définition *On appelle cosinus et on note* cos *la fonction dérivée du sinus sur* $]-1, 1[$.

On a, pour tout $y \in]-1, 1[$:

$$y = \sin \Phi(y).$$

On en déduit :

$$1 = \Phi'(y) \cos \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cos \Phi(y).$$

Ainsi, posant $t = \Phi(y)$ ou, ce qui revient au même, $y = \sin t$, il vient :

$$\cos t = \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2 t},$$

égalité valable pour tout $t \in]-\pi/2, \pi/2[$ puisque y était arbitraire.

De plus, un petit miracle se produit : par composition de fonctions dérivables, le cosinus est dérivable en tout t tel que $\sin t \neq 1$, c'est-à-dire sur $]-\pi/2, \pi/2[$. On a de plus :

$$\cos' t = \frac{-2\cos t \sin t}{2\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{-\cos t \sin t}{\cos t} = -\sin t.$$

On en déduit aussitôt : $\sin'' + \sin = 0$, $\cos'' + \cos = 0$ et les valeurs en 0.

2.1.6 Prolongement du cosinus à $[-\pi/2, \pi/2]$

Lemme 4 *La fonction sinus est dérivable en $\pm\pi/2$ et sa dérivée y est nulle.*

De l'égalité $\cos = \sqrt{1-\sin^2}$ ci-dessus, on déduit que lorsque t tend vers $\pi/2$ par valeurs inférieures, $\cos t$ tend vers 0. Soit alors $t \in [0, \pi/2[$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $\theta \in]t, \pi/2[$ tel que $\sin t - 1 = (t - \pi/2)\cos\theta$. Le lemme en résulte aisément : soit $\varepsilon > 0$, il existe t_0 tel que pour $s \geq t_0$, on ait : $|\cos s| \leq \varepsilon$. Mais pour $t \geq t_0$, on a *a fortiori* $\theta \geq t_0$, si bien que on a aussi :[2] $|\cos\theta| \leq \varepsilon$. On en déduit que le taux de variation du sinus tend vers 0 en $\pi/2$. On fait de même en $-\pi/2$ ou on invoque l'imparité du sinus.

Le lemme permet de définir $\cos \pm\pi/2 = 0$, si bien que cos est continue en $\pi/2$. On démontre comme dans le lemme que puisque la fonction cos est continue sur $[0, \pi/2]$ et que sa dérivée $-\sin$ admet une limite (-1) en $\pi/2$, cos est dérivable en $\pi/2$ et sa dérivée vaut $-1 = -\sin \pi/2$.

Par ailleurs, on vérifie instantanément que la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$, connue sur l'intervalle ouvert, se prolonge à $[-\pi/2, \pi/2]$.

2.1.7 Prolongement du cosinus et du sinus à $\mathbb{R}$

Définition *Soit $x \in]\pi/2, 3\pi/2]$, on a : $\pi - x \in [-\pi/2, \pi/2[$, ce qui permet alors de définir :*

$$\sin x = \sin(\pi - x), \quad \cos x = -\cos(\pi - x).$$

Lemme 5 *Les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur $[-\pi/2, 3\pi/2]$ et on a sur cet intervalle :* $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

2. Ainsi, *a priori* θ n'était pas unique et on ne connaît pas sa valeur, mais on sait que $\cos\theta$ tend vers 0.

Pour démontrer ce lemme, il suffit de vérifier que les limites à gauche et à droite de sin et de ses dérivées sont égales, ce qui est facile.

Lemme 6 *Pout tout réel t, il existe un unique entier p tel que*

$$-\frac{\pi}{2} + 2p\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2p\pi.$$

En effet, si un tel p existe, on a nécessairement :

$$p \leq \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2\pi} < p + 1,$$

donc p est la partie entière de $(x + \pi/2)/(2\pi)$, d'où l'unicité. Inversement, cette partie entière convient, ce qui assure l'existence.

Définition *Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit p comme dans le lemme. On définit :* $\sin x = \sin(x - 2p\pi)$ *et* $\cos x = \cos(x - 2p\pi)$*.*

Par construction, sin et cos sont 2π-périodiques. Quelques comparaisons de limites à gauche et à droite permettent de prouver le lemme suivant.

Lemme 7 *Les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. De plus, le sinus est impair et le cosinus pair. On a enfin :* $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$, $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Les tableaux de variations de sin et cos est connu depuis longtemps sur $[0, \pi/2]$; en suivant les prolongements successifs, on retrouve ceux qu'on connaît sur $\mathbb{R}$.

3 Troisième étude : arc-tangente et autre paramétrage du cercle

On recommence à zéro.

3.1 Construction de l'arc-tangente et de la tangente

Dans ce paragraphe, on utilise la proposition 4 comme une motivation pour *définir* une fonction qu'on appelle arc-tangente. On verra dans le paragraphe suivant comment cette définition permet de construire d'une façon alternative les fonctions circulaires.

On pose, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$A(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{1 + s^2}.$$

Ainsi, A est la primitive nulle en 0 de $t \mapsto (1 + t^2)^{-1}$. Par parité de la fonction intégrée, vu que la borne constante est 0, on voit que A est impaire. De plus, A est dérivable et, comme sa dérivée est strictement positive, A est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-L, L[$ où $L = \lim_{+\infty} A$.

Montrons que L est finie. En effet, on a, pour $t \geq 1$:

$$A(t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{1 + s^2} + \int_1^t \frac{\mathrm{d}s}{1 + s^2} \leq A(1) + \int_1^t \frac{\mathrm{d}s}{s^2} = A(1) + 1 - \frac{1}{t}.$$

Définition *On appelle π le réel :*

$$\pi = 2 \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{1 + s^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{1 + s^2}.$$

On définit la fonction tangente $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ *comme la réciproque de la fonction A.*

On voit que par construction, la tangente est une bijection strictement croissante et dérivable. De plus, pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, la relation $\tan(A(t)) = t$ donne par dérivation :

$$1 = A'(t)\tan' A(t) = \frac{1}{1+t^2}\tan' A(t),$$

d'où on déduit en posant $t = \tan\alpha$ qu'on a pour tout α réel :

$$\tan'\alpha = 1 + t^2 = 1 + \tan^2\alpha.$$

3.1.1 Un habile paramétrage du cercle

On part du paramétrage suivant du cercle-unité privé de $N = (-1, 0)$ par un point situé sur la droite d'équation $x = 1$ (la tangente au cercle en $(1, 0)$). Fixons un point P de cette droite, de coordonnées $(1, 2t)$ avec t réel ; on appelle $M = (x, y)$ le point de la droite (PN) situé sur le cercle unité et distinct de N.

La motivation de cette construction est donnée par le théorème de l'angle inscrit : l'angle $(\overrightarrow{NO}, \overrightarrow{NP})$ est la moitié de l'angle $\alpha = (\overrightarrow{NO}, \overrightarrow{OM})$, si bien qu'en anticipant un peu, on peut prévoir qu'on aura :

$$t = \tan\frac{\alpha}{2}, \quad x = \cos\alpha, \quad y = \sin\alpha.$$

Connaissant x et y en fonction de t et t en fonction de α, on en déduira le cosinus et le sinus.

Déterminons x et y. On a, puisque M appartient à (NP) :

$$0 = \begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ y & 2t \end{vmatrix} = -2(y - t(x+1)).$$

On sait de plus que $x^2 + y^2 = 1$, d'où on tire : $x^2 + t^2(x+1)^2 = 1$, puis $(1+t^2)x^2 + 2t^2x + t^2 - 1 = 0$, équation dont on sait que $x = -1$ est solution. En l'éliminant, on trouve :

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

3.2 Fonctions circulaires

Soit α un réel. On *définit* son cosinus et son sinus par :

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \text{où} \ \ t = \tan\frac{\alpha}{2}.$$

On veut dériver cosinus et sinus. On calcule d'abord la dérivée de la fonction $\alpha \mapsto \tan(\alpha/2)$, notée par commodité $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\alpha$. Pour tout α réel, on a :

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{1}{2}\tan'\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{1+t^2}{2}.$$

Par dérivation de fonctions composées, il vient :

$$\cos'\alpha = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha}\,\frac{(-2t)(1+t^2) - 2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{-2t}{1+t^2} = -\sin\alpha, \quad \sin'\alpha = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha}\,\frac{2(1+t^2) - 2t\times 2t}{(1+t^2)^2} = \cos\alpha.$$

On en déduit aisément que cosinus et sinus sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et satisfont aux propriétés de la première étude.