Université Claude Bernard Lyon 1
L1 de Mathématiques : Algèbre
Année 2014–2015

Algèbre linéaire dans le plan

Ce chapitre ne contient aucun résultat difficile mais en germe, on trouve toutes les notions d'algèbre linéaire qui seront développées au S2.

Notation. On convient de noter $\binom{x}{y}$ le couple (x, y). La raison en apparaîtra lorsque l'on multipliera une matrice par un vecteur en III 3°.

I Systèmes 2×2

0° Préliminaire aux préliminaires : système 1×1...

On se donne deux réels a et b. On cherche les réels x tels que

$$ax = b.$$

Si $a \neq 0$, ce système d'une équation à une inconnue x possède une unique solution : $x = b/a$.
Si $a = 0$, il a zéro ou une infinité de solutions : si $b \neq 0$, il n'y a pas de solution (en effet, pour tout x réel, $0x \neq b$) ; si $b = 0$, tout réel x est solution (en effet, pour tout x réel, $0x = 0$...).

1° Solutions d'un système 2×2

On se donne six réels a, b, c, d, e, f. On cherche les couples de réels $\binom{x}{y}$ tels que

$$(S) \qquad \begin{cases} ax + by = e & (L_1) \\ cx + dy = f & (L_2). \end{cases}$$

On va résoudre ce système de 2 équations à 2 inconnues x et y et 6 paramètres $a, \ldots, f$.

Proposition. *Avec les notations précédentes, deux cas sont possibles :*

1. *si $ad - bc \neq 0$, alors le système (S) admet une unique solution :* $\begin{cases} x = \dfrac{de - bf}{ad - bc}, \\ y = \dfrac{-ce + af}{ad - bc}; \end{cases}$
2. *si $ad - bc = 0$, alors le système (S) n'a aucune solution ou bien il en a une infinité.*

Remarque. Il est important de remarquer que la disjonction ne porte que sur le membre de gauche – c'est-à-dire sur (a, b, c, d) et pas sur (e, f).
Dans le deuxième cas ($ad - bc = 0$), on voit que zéro solution ou une infinité de solutions sont les deux faces d'une même médaille. On est dans un sous-cas ou l'autre selon la valeur de (e, f).

Remarque. Géométriquement (figure 1), cela s'interprète ainsi : l'ensemble des points $\binom{x}{y}$ tels que $ax + by = e$ (resp. $cx + dy = f$) est une droite de vecteur directeur $\binom{-b}{a}$ (resp. $\binom{-d}{c}$), sauf dans le cas dégénéré $a = b = 0$ (resp. $c = d = 0$).
L'ensemble des solutions du système (S) est donc l'intersection des deux droites. La disjonction des cas porte sur le fait que les vecteurs $\binom{-b}{a}$ et $\binom{-d}{c}$ sont colinéaires ou pas (voir II 3°), c'est-à-dire sur le fait que les droites sont parallèles ou pas.
Si elles ne sont pas parallèles, les deux droites se coupent en un unique point. Si elles sont parallèles, leur intersection est vide (si elles sont distinctes) ou c'est une droite entière (si elles sont égales).

La fin de ce paragraphe est une preuve de la proposition.

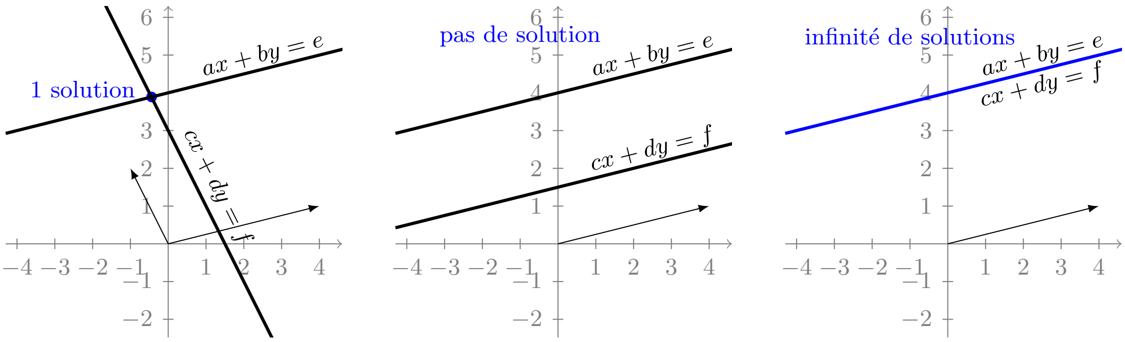

FIGURE 1 – Système général et deux cas dégénérés

2° **Cas** $ad-bc\neq 0$

On traite ce cas de deux façons différentes.

a) On suppose que $ad-bc\neq 0$. Soit $\binom{x}{y}$ un élément de $\mathbb{R}^2$. Supposons d'abord que $a\neq 0$.

$$
\begin{aligned}
(S) &\iff \left\{\begin{array}{cccll} x & +\frac{b}{a}y & = & \frac{e}{a} & (L_1') \\ cx & +dy & = & f & (L_2) \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccl} x & +\frac{b}{a}y & = & \frac{e}{a} & (L_1') \\ & \left(d-\frac{cb}{a}\right)y & = & f-\frac{ce}{a} & (L_2-cL_1') \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{cccc} x & +\frac{b}{a}y & = & \frac{e}{a} \\ & y & = & \dfrac{-ce+af}{ad-bc} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccl} x & = & \dfrac{e}{a}-\dfrac{b}{a}\,\dfrac{-ce+af}{ad-bc}=\dfrac{de-bf}{ad-bc} \\ y & = & \dfrac{-ce+af}{ad-bc}, \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

ce qui prouve la proposition dans le cas où $ad-bc\neq 0$ et $a\neq 0$.
Comme $ad-bc\neq 0$, si $a=0$, alors nécessairement, $c\neq 0$. On permute les deux équations et on résout « de bas en haut ».

$$
\begin{aligned}
(S) &\iff \left\{\begin{array}{cccc} cx & +dy & = & f \\ & by & = & e \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{cccc} cx & & = & f-d\frac{e}{b} \\ & y & = & \frac{e}{b} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccl} x & = & \frac{-de+bf}{bc}=\frac{de-bf}{ad-bc} \\ y & = & \frac{-ce}{-bc}=\frac{-ce+af}{ad-bc}, \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

ce qui prouve la proposition dans le cas où $ad-bc\neq 0$ et $a=0$.

b) Une méthode plus efficace (mais moins extensible aux dimensions supérieures) consiste à faire des combinaisons linéaires des équations.

$$(S) : \left\{\begin{array}{rrcl} ax & +by & = & e \\ cx & +dy & = & f \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \times d \\ \times(-b) \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \times(-c) \\ \times a \end{array}\right.$$

On voit que si $\binom{x}{y}$ est solution de (S), alors on a nécessairement :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (ad-bc)x & = & de-bf \\ (ad-bc)y & = & -ce+af \end{array}\right. \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{de-bf}{ad-bc} \\ y & = & \dfrac{-ce+af}{ad-bc}. \end{array}\right.$$

Cela prouve que la solution, si elle existe, est unique et cela donne sa valeur. Il resterait à vérifier que le couple trouvé est bien solution, mais on l'omet.

3° Cas $ad-bc=0$

On suppose que $ad-bc=0$. Supposons d'abord que $a \neq 0$ et soit $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$. On reprend le début de la première méthode.

$$\begin{array}{rcl} (S) & \iff & \left\{\begin{array}{rrcll} x & +\frac{b}{a}y & = & \frac{e}{a} & (L_1') \\ cx & +dy & = & f & (L_2) \end{array}\right. \\ & \iff & \left\{\begin{array}{lrcll} x & +\frac{b}{a}y & = & \frac{e}{a} & (L_1') \\ & \left(d-\frac{cb}{a}\right)y & = & f-\frac{ce}{a} & (L_2-cL_1') \end{array}\right. \\ & \iff & \left\{\begin{array}{lrcl} x & +\frac{b}{a}y & = & \frac{e}{a} \\ & 0 & = & -ce+af \end{array}\right. \end{array}$$

Si $-ce+af \neq 0$, alors la deuxième égalité n'est satisfaite pour aucune valeur de $\binom{x}{y}$. Autrement dit, le système (S) n'a pas de solution.

Si $-ce+af=0$, alors le choix de y arbitraire dans $\mathbb{R}$ donne lieu à un couple solution : $\begin{pmatrix} \frac{e-by}{a} \\ y \end{pmatrix}$.
Autrement dit, le système (S) a une infinité de solutions.
Les autres cas ($b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, $a=b=c=d=0$) sont semblables et omis.

II Vecteurs et bases

1° Vecteurs

On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère les éléments de $\mathbb{R}^2$ comme des *vecteurs*. Cela signifie que l'on peut faire les opérations habituelles sur les vecteurs : somme et produit d'un réel par un vecteur. Plus précisément, étant donné deux vecteurs $u = \binom{x_1}{x_2}$ et $u' = \binom{x_1'}{x_2'}$ dans $\mathbb{R}^2$ et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit :

$$u+u' = \begin{pmatrix} x_1+x_1' \\ x_2+x_2' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda u = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

Pour les dessins, on représentera les vecteurs par une flèche *dont l'origine est en* $\binom{0}{0}$.

NOTATION. On appelle *vecteur nul* et on note : $\overrightarrow{0} = \binom{0}{0}$.

Lemme (propriétés formelles des opérations)**.** *Soient u, u', et u'' trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et λ, λ' deux réels. On a :*

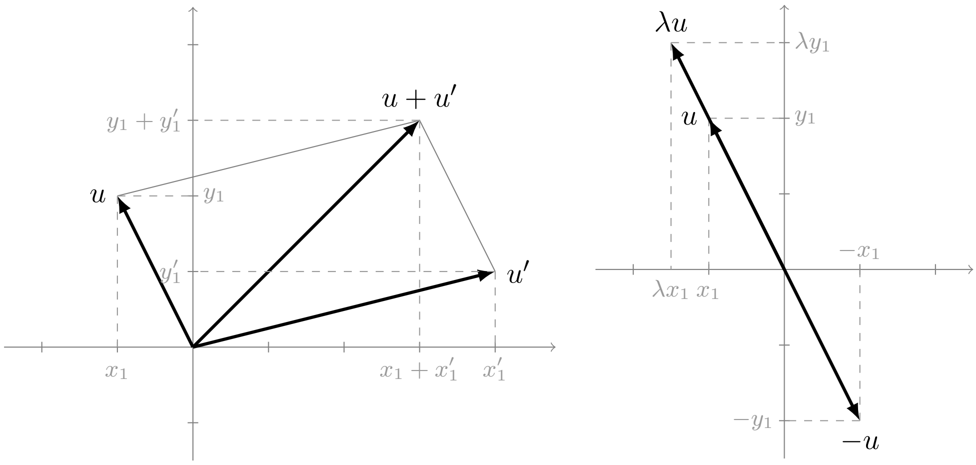

FIGURE 2 – Somme de deux vecteurs, produit d'un réel par un vecteur

(i) *la somme est* associative *:* $(u+u')+u''=u+(u'+u'')$ *;*

(ii) *la somme admet un* neutre *:* $u+\overrightarrow{0}=u=\overrightarrow{0}+u$ *;*

(iii) *tout élément admet un* opposé *:* $u+(-u)=\overrightarrow{0}=(-u)+u$ *;*

(iv) *la somme est* commutative *:* $u+u'=u'+u$ *;*

(v) *le réel* 1 *est « neutre » :* $1u=u$ *;*

(vi) *le produit est doublement* distributif *sur la somme :*

  (a) $(\lambda+\lambda')u=\lambda u+\lambda' u$ *;*

  (b) $\lambda(u+u')=\lambda u+\lambda u'$ *;*

(vii) *il y a une sorte d'« associativité »*[1] *:* $\lambda(\lambda' u)=(\lambda\lambda')u$.

Ces propriétés seront la définition abstraite des espaces vectoriels au S2.

Exercice. Soient λ un réel et u un vecteur. Démontrer que $\lambda u=\overrightarrow{0}$ SSI $\lambda=0$ ou $u=\overrightarrow{0}$.

2° Combinaisons linéaires

Étant donnés un couple de vecteurs (u_1,u_2) et deux scalaires λ_1 et λ_2, on forme la *combinaison linéaire* de (u_1,u_2) définie par le couple de scalaires (λ_1,λ_2) ainsi :

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2.$$

De façon générale, un vecteur v est combinaison linéaire de (u_1,u_2) s'il existe (λ_1,λ_2) réels tels que

$$v=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2.$$

On voit bien comment étendre la définition à une famille de 3 vecteurs ou plus. Par exemple, une combinaison linéaire d'un triplet de vecteurs (u_1,u_2,u_3) est un vecteur v pour lequel il existe des coefficients $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ tels que $v=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3$.

Remarque (calcul d'une combinaison linéaire en coordonnées). Soient $u_1=\binom{a}{c}$ et $u_2=\binom{b}{d}$ deux vecteurs du plan. La combinaison linéaire de (u_1,u_2) définie par les coefficients (λ_1,λ_2) est :

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2=\lambda_1\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 a\\\lambda_2 c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda_1 b\\\lambda_2 d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\lambda_1+b\lambda_2\\c\lambda_1+d\lambda_2\end{pmatrix}.$$

1. L'expression est à prendre avec des forts guillemets car il y a *deux* opérations en jeu : le produit des réels et le produit d'un réel par un vecteur.

Une question récurrente en algèbre linéaire : est-ce que tel vecteur est combinaison linéaire de telle famille ? Si oui, est-ce qu'il y a une ou plusieurs familles de coefficients possibles ?

3° Colinéarité

Définition. Soient u_1 et u_2 deux vecteurs. On dit que u_1 et u_2 sont *colinéaires* s'il existe λ_1 et λ_2 qui ne sont pas tous les deux nuls [2], c'est-à-dire tel que $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$, satisfaisant à :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \overrightarrow{0}.$$

Exemple. Les vecteurs u_1 et $\overrightarrow{0}$ sont colinéaires *pour tout vecteur* u_1.

On donne une reformulation peut-être plus standard de la définition.

Lemme. *Soient u_1 et u_2 deux vecteurs. Alors u_1 et u_2 sont colinéaires si et seulement si il existe μ réel tel que $u_1 = \mu u_2$ ou $u_2 = \mu u_1$.*

Démonstration. Supposons qu'existent λ_1 et λ_2 pas tous les deux nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \overrightarrow{0}$. Si $\lambda_1 \neq 0$, on pose $\mu = -\lambda_2/\lambda_1$ et on a : $u_1 = \mu u_2$. Sinon, c'est que $\lambda_2 \neq 0$; on pose alors $\mu = -\lambda_1/\lambda_2$ et on a : $u_2 = \mu u_1$. Autrement dit, si le vecteur nul est combinaison linéaire nulle de (u_1, u_2) avec des coefficients pas tous nuls, alors on peut exprimer un vecteur en fonction de l'autre.
Réciproquement, supposons que l'on ait : $u_1 = \mu u_2$ pour μ réel convenable. Alors, en posant $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -\mu$, on a : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \overrightarrow{0}$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$. Idem si $u_2 = \mu u_1$.

Proposition. *Soient $u_1 = \binom{a}{c}$ et $u_2 = \binom{b}{d}$ deux vecteurs. Alors u_1 et u_2 sont colinéaires si et seulement si $ad - bc = 0$.*

Démonstration. Supposons que u_1 et u_2 soient colinéaires. D'après le lemme, il existe μ tel que $u_1 = \mu u_2$ ou $u_2 = \mu u_1$. Dans le premier cas, cela signifie que l'on a : $\binom{a}{c} = \mu \binom{b}{d} = \binom{\mu b}{\mu d}$. Mais alors : $ad - bc = \mu bd - b\mu d = 0$. L'autre cas est analogue.
Réciproquement, supposons que l'on ait : $ad - bc = 0$. Si $\binom{a}{c} = \binom{0}{0}$, alors $u_1 = \overrightarrow{0} = 0u_2$ donc les vecteurs sont colinéaires. Sinon, a ou c n'est pas nul. Si a n'est pas nul, on écrit : $d = \frac{b}{a}c$, ce qui donne : $u_2 = \binom{\frac{b}{a}a}{\frac{b}{a}c} = \frac{b}{a}\binom{a}{c} = \frac{b}{a}u_1$; le cas où c n'est pas nul est analogue.

4° Bases

Définition. Soient (u_1, u_2) un couple de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On dit que (u_1, u_2) est une *base* de $\mathbb{R}^2$ si tout vecteur v du plan peut s'exprimer de façon unique comme combinaison linéaire de (u_1, u_2), c'est-à-dire :

$$\forall v \in \mathbb{R}^2,\ \exists!(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad v = x_1 u_1 + x_2 u_2.$$

Dans ces conditions, on appelle l'unique couple (x_1, x_2) les *coordonnées* de v dans la base (u_1, u_2).

Remarque (recherche des coordonnées). Notons $u_1 = \binom{a}{c}$ et $u_2 = \binom{b}{d}$ et $v = \binom{e}{f}$. On a :

$$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 \iff \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} ax_1 + bx_2 = e \\ cx_1 + dx_2 = f. \end{cases}$$

Ainsi, *la recherche des coordonnées $\binom{x_1}{x_2}$ se traduit par la résolution d'un système* 2×2.

2. Cela signifie que l'un ou l'autre n'est pas nul ; mais l'un ou l'autre peut éventuellement être nul.

Exercice typique. On donne deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Il faut vérifier qu'ils forment une base et de calculer les coordonnées d'un vecteur dans cette base.

Exemple. Soient $e_1 = \binom{1}{0}$ et $e_2 = \binom{0}{1}$. Une combinaison linéaire de (e_1, e_2) est de la forme :

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

avec x_1 et x_2 réels. Comme par définition de $\mathbb{R}^2$, tout vecteur v de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de façon unique $\binom{x_1}{x_2}$, il s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de (e_1, e_2).

Définition. La base (e_1, e_2) définie dans l'exemple précédent est appelée *base canonique* de $\mathbb{R}^2$.

Proposition (critère pour être une base)**.** *Soient $u_1 = \binom{a}{c}$ et $u_2 = \binom{b}{d}$ deux vecteurs. Alors (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $ad - bc \neq 0$.*
Autrement dit, une base de $\mathbb{R}^2$ est un couple de vecteurs non colinéaires.

Démonstration. La remarque précédente montre que (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si, pour tout $\binom{e}{f} \in \mathbb{R}^2$, le système

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = e \\ cx_1 + dx_2 = f \end{cases}$$

possède une unique solution. D'après la partie I, c'est équivalent à la condition $ad - bc \neq 0$.

Remarque (importante). Le nombre de vecteurs pour une base de $\mathbb{R}^2$ est obligatoirement 2.
Si on n'a qu'un seul vecteur u_1, il existe des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas combinaison linéaire de u_1, c'est-à-dire de la forme $x_1 u_1$ avec $x_1 \in \mathbb{R}$.

> En effet, notons $u_1 = \binom{a}{b}$. Si $u_1 = \overrightarrow{0}$, c'est clair : comme on a $x_1 u_1 = \overrightarrow{0}$, aucun vecteur non nul n'est combinaison linéaire de u_1. Si $u_1 \neq \overrightarrow{0}$, le vecteur $\binom{-b}{a}$ n'est pas combinaison linéaire de u_1. En effet, on a :
>
> $$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = x_1 u_1 = x_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -b = x_1 a \\ a = x_1 b \end{cases} \implies a^2 = x_1 ab = -b^2,$$
>
> et dans $\mathbb{R}$, la relation $a^2 + b^2 = 0$ entraîne $a = b = 0$, ce qui est absurbe.

Il faut donc au moins deux vecteurs. Mais si on en a trois, disons (u_1, u_2, u_3), c'est trop pour avoir la bonne propriété de base (existence et unicité des coordonnées).

> On suppose que l'un d'entre eux, disons u_1, n'est pas nul. Si les trois vecteurs sont deux à deux colinéaires, on a : $u_2 = \mu_2 u_1$ et $u_3 = \mu_3 u_1$ pour μ_2, μ_3 convenables (vérifier !), de sorte qu'une combinaison linéaire de (u_1, u_2, u_3) est de la forme $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = (\lambda_1 + \lambda_2 \mu_2 + \lambda_3 \mu_3) u_1$ et on est ramené au cas d'un seul vecteur.
> Si deux des trois vecteurs ne sont pas colinéaires, disons u_1 et u_2 pour fixer les idées, alors (u_1, u_2) est une base. Par conséquent, u_3 est une combinaison linéaire de (u_1, u_2), c'est-à-dire qu'existent λ_1 et λ_2 (uniques) tels que $u_3 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$. Mais alors, pour v un vecteur quelconque, il existe des réels (x_1, x_2) tels que $v = x_1 u_1 + x_2 u_2$. On a alors :
>
> $$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 = (x_1 - \lambda_1) u_1 + (x_2 - \lambda_2) u_2 + u_3,$$
>
> ce qui donne deux triplets distincts $(x_1, x_2, 0)$ et $(x_1 - \lambda_1, x_2 - \lambda_2, 1)$ qui définissent la même combinaison linéaire v. On n'a donc pas unicité de l'expression de v comme combinaison linéaire de (u_1, u_2, u_3).

III Applications linéaires

1° Définition

Définition. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application. On dit que φ est *linéaire* si, pour tous vecteurs v, v' et tout réel λ, on a :

$$\varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v') \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v).$$

Remarque (importante). L'image du vecteur nul par une application linéaire est le vecteur nul. Autrement dit, si φ est linéaire, on a :

$$\varphi(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}.$$

En effet, de la relation $\overrightarrow{0} = 0 \times \overrightarrow{0}$, on tire : $\varphi(\overrightarrow{0}) = \varphi(0 \times \overrightarrow{0}) = 0 \times \varphi(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.

Exemples. Les applications suivantes sont linéaires : pour $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ quelconque, on pose :

1. $\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$;
2. $\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ (identité) ;
3. $\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x_1\\3x_2\end{pmatrix}$ (homothétie de rapport 3) ;
4. $\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\2x_2\end{pmatrix}$ (dilatation dans la direction de e_2)

Pour des exemples plus significatifs, voir la suite et cette page (lien depuis le wiki du cours).

Pour tester si une application est linéaire, on peut regrouper les deux conditions de la définition en une seule égalité : c'est ce que fait la condition (ii). Il faut également savoir reconnaître « à vue » une application linéaire lorsqu'elle est donnée en coordonnées : en d'autres termes, il faut absolument photographier la relation (iii).

Proposition (critères de linéarité)**.** *Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *φ est linéaire ;*

(ii) *$\forall v, v' \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda v + \lambda' v') = \lambda\varphi(v) + \lambda'\varphi(v')$;*

(iii) *il existe quatre réels a, b, c et d tels que pour tout vecteur $v = \binom{x_1}{x_2}$, on ait :*

$$\varphi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax_1 + bx_2\\cx_1 + dx_2\end{pmatrix}.$$

Démonstration. (i)$\Rightarrow$(ii) Supposons que φ soit linéaire. Soient v, v' deux vecteurs et λ, λ' deux réels. On a, en utilisant successivement les deux conditions de linéarité :

$$\varphi(\lambda v + \lambda' v') = \varphi(\lambda v) + \varphi(\lambda' v') = \lambda\varphi(v) + \lambda'\varphi(v').$$

(ii)$\Rightarrow$(i) Bien que ce ne soit pas optimal, on prouve la réciproque. Supposons que la conditions (ii) soit remplie. Soient v et v' deux vecteurs. Prenons $\lambda = \lambda' = 1$ et appliquons la relation, on trouve :

$$\varphi(v + v') = \varphi(1v + 1v') = 1\varphi(v) + 1\varphi(v') = \varphi(v) + \varphi(v').$$

D'autre part, prenons $\lambda' = 0$ et appliquons à nouveau la relation (ii), il vient :

$$\varphi(\lambda v) = \varphi(\lambda v + 0v') = \lambda\varphi(v) + 0\varphi(v') = \lambda\varphi(v).$$

(ii)$\Rightarrow$(iii) Supposons à nouveau la condition (ii) remplie. Pour prouver (iii), on va utiliser la base canonique (e_1, e_2). Notons $\varphi(e_1) = \binom{a}{c}$ et $\varphi(e_2) = \binom{b}{d}$. Pour un vecteur quelconque $v \in \mathbb{R}^2$, on écrit comme précédemment :

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

puis on utilise la condition (ii) :

$$\varphi(v) = \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2) = x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) = x_1 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix},$$

ce qui prouve (iii).
(iii)$\Rightarrow$(ii) Supposons la condition (iii) remplie et prouvons que φ est linéaire. Étant donnés deux vecteurs $v = \binom{x_1}{x_2}$ et $v' = \binom{x'_1}{x'_2}$ et deux réels λ et λ', on calcule :

$$\lambda v + \lambda' v' = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda' x'_1 \\ \lambda x_2 + \lambda' x'_2 \end{pmatrix}$$

puis, en remplaçant x_1 par $\lambda x_1 + \lambda' x'_1$ et x_2 par $\lambda x_2 + \lambda' x'_2$ dans l'expression (iii) de φ :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda v + \lambda' v') &= \varphi \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda' x'_1 \\ \lambda x_2 + \lambda' x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(\lambda x_1 + \lambda' x'_1) + b(\lambda x_2 + \lambda' x'_2) \\ c(\lambda x_1 + \lambda' x'_1) + d(\lambda x_2 + \lambda' x'_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(ax_1 + bx_2) + \lambda'(ax'_1 + bx'_2) \\ \lambda(cx_1 + dx'_1) + \lambda'(cx'_1 + dx'_2) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \lambda' \begin{pmatrix} ax'_1 + bx'_2 \\ cx'_1 + dx'_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda'\varphi \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \lambda\varphi(v) + \lambda'\varphi(v').
\end{aligned}$$

Au bilan, on a prouvé que (i)$\Leftrightarrow$(ii) et que (ii)$\Leftrightarrow$(iii), ce qui n'est pas optimal en termes de « nombre de preuves » mais suffit pour prouver la proposition [3].
Il est fortement conseillé de *faire* les calculs précédents plutôt que de se contenter de les *suivre.*

2° Matrice d'une application linéaire dans une base

a) L'idée

Dans la preuve précédente, a, b, c, d ont été en quelque sorte parachutés. En fait, ils sont parfaitement déterminés par φ. En effet, si une application est donnée par la formule (iii), $\varphi\binom{x_1}{x_2} = \binom{ax_1+bx_2}{cx_1+dx_2}$ on a, en prenant $\binom{x_1}{x_2} = \binom{1}{0}$ puis $\binom{x_1}{x_2} = \binom{0}{1}$:

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Mais la base canonique n'est, après tout, qu'une base comme les autres. L'idée est la suivante.

Message. *La donnée de l'image de deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ détermine une unique application linéaire. On code cette donnée dans une « matrice ».*

3. Cela illustre de plus le rôle central dans la théorie des combinaisons linéaires qui apparaissent dans (ii).

b) Matrices

Définition. On appelle *matrice* 2×2, ou pour ce chapitre simplement *matrice*, toute application $A : \{1,2\}\times\{1,2\}\to\mathbb{R}$, $(i,j)\mapsto a_{ij}$. On la représente simplement par un tableau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

la disposition des coefficients dans le tableau permettant de retrouver l'image d'un élément (i,j).

Exemple. On appelle matrice du système (S) du paragraphe I la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

c) Matrice d'une application linéaire

Définition. Soient $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$ et φ une application linéaire. On appelle *matrice de* φ *dans la base* $\mathbf{u}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathbf{u}}(\varphi)$ la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{u}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

dont les coefficients sont définis *par colonnes* ainsi (repérer la place des indices !) :

⋆ $\binom{a_{11}}{a_{21}}$, la première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathbf{u}}(\varphi)$ est la colonne des coordonnées de l'image de u_1 par φ :

$$\varphi(u_1) = a_{11}u_1 + a_{21}u_2;$$

⋆ $\binom{a_{12}}{a_{22}}$, la deuxième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathbf{u}}(\varphi)$ est la colonne des coordonnées de $\varphi(u_2)$:

$$\varphi(u_2) = a_{12}u_1 + a_{22}u_2;$$

Un moyen mnémotechnique est de décorer la matrice ainsi :

$$\begin{array}{cc} \varphi(u_1) & \varphi(u_2) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}$$

Exemple. Soient a, b, c, d réels et φ l'application linéaire définie par :

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}.$$

On prend pour base la base canonique $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$. On a calculé les images de e_1 et e_2 par φ :

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},$$

de sorte que la matrice de φ dans la base $\mathbf{e}$ est :

$$\begin{array}{cc} \varphi(e_1) & \varphi(e_2) \\ \end{array}$$
$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

c'est-à-dire la matrice du système (S) : $\varphi\binom{x_1}{x_2} = \binom{e}{f}$. Quoi de plus naturel en somme ?

Exercice typique. Une base de $\mathbb{R}^2$ est donnée, une application linéaire est donnée, il faut calculer sa matrice. Pour cela, on calcule l'image des vecteurs de la bases puis les coordonnées de ces images dans la base en question.

Exemple. Soit $\varphi = \mathrm{Id} : v \mapsto v$. Alors φ est linéaire et sa matrice dans toute base $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{u}}(\mathrm{Id}) = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, l'image de u_1 est $\mathrm{Id}(u_1) = u_1$, qui a pour coordonnées $\binom{1}{0}$ dans $\mathbf{u}$n ; cela donne la première colonne. De même, l'image de u_2 a pour coordonnées $\binom{0}{1}$.

Mise en garde. *À quelques exceptions près (l'identité et plus généralement les homothéties), la matrice d'une application linéaire* dépend *de la base dans laquelle on la calcule.*

Exemple. Soit, pour $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$, $\varphi\binom{x_1}{x_2} = \binom{x_2}{x_1}$. La matrice de φ dans la base canonique est donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(vérifier !). Mais si on prend pour base $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = \binom{1}{1}$ et $u_2 = \binom{1}{-1}$, on a :

$$\varphi(u_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_1 \quad \text{et} \quad \varphi(u_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -u_2$$

donc les coordonnées de $\varphi(u_1)$ dans $\mathbf{u}$ sont $\binom{1}{0}$ et celles de $\varphi(u_2)$ sont $\binom{0}{-1}$; par suite :

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{u}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(\varphi).$$

3° Calcul de l'image d'un vecteur

Données : une base $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, une application linéaire φ ; on peut donc calculer $A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{u}}(\varphi)$; pour v un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on note $X = \binom{x_1}{x_2}$ ses coordonnées dans $\mathbf{u}$.
But : calculer les coordonnées de $\varphi(v)$ en fonction des données.
C'est un calcul facile :

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \varphi(x_1u_1 + x_2u_2) = x_1\varphi(u_1) + x_2\varphi(u_2) \\ &= x_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2) + x_2(a_{12}u_1 + a_{21}u_2) \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)u_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)u_2), \end{aligned}$$

de sorte que les coordonnées de $\varphi(v)$ sont :

$$\varphi(v) : \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

Définition. Avec les notations précédentes, on appelle *produit* de A par le vecteur X le vecteur

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

Remarque. La disposition des vecteurs en colonnes permet de faire le calcul de AX ainsi :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

4° Matrice de la composée

Données : une base $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, deux applications linéaires φ et ψ ; on peut donc calculer

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{u}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathbf{u}}(\psi) = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

But : calculer la matrice de $\varphi \circ \psi$ en fonction des données. Cela a bien un sens. En effet...

Lemme. *La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

Le calcul de la matrice de la composée est un calcul un peu lourd mais facile. Soit v un vecteur et $\binom{x_1}{x_2}$ ses coordonnées dans $\mathbf{u}$. Par le calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur, les coordonnées de $\psi(v)$ dans $\mathbf{u}$ sont :

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

Par suite, les coordonnées de l'image par φ de $\psi(v)$ sont :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 \\ a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{12}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2) \\ a_{21}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{22}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})x_2 \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de la composée est le produit AB au sens où...

Définition. Avec les notations précédentes, on appelle *produit* de A par B la matrice :

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Remarque. On peut disposer le calcul de AB de la façon suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \end{array}$$

5° Deux sous-espaces importants

Définition. On appelle *noyau* d'une application linéaire φ et on note $\mathrm{Ker}\,\varphi$ l'ensemble :

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{v \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(v) = \overrightarrow{0}\}.$$

On appelle *image* d'une application linéaire φ et on note $\mathrm{Im}\,\varphi$ l'ensemble :

$$\mathrm{Im}\,\varphi = \{v \in \mathbb{R}^2,\ \exists u \in \mathbb{R}^2,\ v = \varphi(u)\} = \{\varphi(u) \in \mathbb{R}^2,\ u \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exercice. Le noyau (resp. l'image) de φ est $\{\overrightarrow{0}\}$, $\mathbb{R}^2$ ou une droite contenant $\overrightarrow{0}$ sinon.

6° Automorphismes de $\mathbb{R}^2$

Définition. On appelle *automorphisme* de $\mathbb{R}^2$ toute application linéaire bijective.

Remarque. Si φ est bijective, la bijection réciproque φ^{-1} est linéaire. En effet, soient v et v' deux vecteurs et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe u et u' (uniques) tels que $v = \varphi(u)$ et $v' = \varphi(u)$. Alors : $v + v' = \varphi(u) + \varphi(u') = \varphi(u + u')$ donc : $\varphi^{-1}(v + v') = u + u' = \varphi^{-1}(v) + \varphi^{-1}(v')$. De même, de $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$ on tire : $\lambda\varphi^{-1}(v) = \lambda u = \varphi^{-1}(\lambda\varphi(u)) = \varphi^{-1}(\lambda v)$. D'où la linéarité de φ^{-1}.

Proposition. *Soit* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *une base de* $\mathbb{R}^2$ *et soit* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *linéaire. On note :*

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{u}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) φ *est bijective ;*

(b) $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\overrightarrow{0}\}$ *;*

(c) $ad - bc \neq 0$.

Si c'est le cas, la matrice de φ^{-1} *est :*

$$A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathbf{u}}(\varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Commençons par une remarque préliminaire. Soient v et w deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $X = \binom{x_1}{x_2}$ et $Y = \binom{y_1}{y_2}$ leurs coordonnées respectives dans $\mathbf{u}$. Alors, l'égalité $\varphi(v) = w$ équivaut à l'égalité des coordonnées de $\varphi(v)$ et de w dans $\mathbf{u}$, ce qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{soit encore : } \begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases} \quad (S).$$

À présent, prouvons l'équivalence. L'assertion (a) exprime que φ est bijective, c'est-à-dire que pour tout w, il existe un unique v tel que $\varphi(v) = w$. C'est équivalent à dire que pour tout $\binom{y_1}{y_2}$, le système (S) possède une unique solution. L'assertion (b) signifie que le système (S) possède une unique solution lorsque $y_1 = y_2 = 0$. On a vu dans la partie I que ces deux conditions équivalent à la condition (c) : $ad - bc \neq 0$. Qui plus est, l'antécédent de $\binom{y_1}{y_2}$ est alors la solution de (S), c'est-à-dire le vecteur

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} y_1 + \frac{-b}{ad-bc} y_2 \\ \frac{-c}{ad-bc} y_1 + \frac{a}{ad-bc} y_2 \end{pmatrix},$$

qui est fonction linéaire de $\binom{y_1}{y_2}$, ce qui prouve la dernière assertion.

Remarque. On a, avec les notations de la proposition : $AA^{-1} = I_2 = A^{-1}A$ (vérifier !).

7° Déterminant d'une application linéaire

Le nombre $ad-bc$ qui intervient au paragraphe précédent pourrait dépendre de la base $\mathbf{u}$ choisie : ce n'est pas le cas. Nous verrons au S2 une version plus générale du lemme suivant qui repose sur la formule de changement de base sur les applications linéaires. Nous l'admettrons ici.

Lemme. *Soit* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *linéaire. Soit* $\mathbf{u}$ *une base de* $\mathbb{R}^2$ *et soit* $A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{u}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *Alors le nombre* $ad - bc$ *ne dépend que de* φ *et pas du choix de* $\mathbf{u}$.

Définition. Avec ces notations, on appelle *déterminant* de φ le réel $ad - bc$; on le note $\det(\varphi)$. (On a vu plus haut que φ est bijective SSI $\det(\varphi) \neq 0$.)

8° Exemples : homothéties, rotations, projections, symétries

Peut-être traité en TD. Voir toutefois la page cette page (il y a un lien depuis le wiki du cours).