Université Claude Bernard Lyon 1
L1 de Mathématiques : Math. II Algèbre (cursus PMI)
Année 2014–2015

On fixe pour tout le chapitre un corps $\mathbb{K}$.

I Matrice d'une application linéaire

1° L'espace des matrices

[...]

2° Matrice d'un vecteur

Définition. Soit E un espace vectoriel, $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour $v \in E$, on appelle *matrice de v dans* $\mathbf{e}$ ou *colonne des coordonnées de v dans* $\mathbf{e}$ la matrice-colonne $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(v) = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$ définie par :

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j.$$

Lemme. *Avec ces notations, l'application* $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}} : E \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. Considérons l'application « combinaison linéaire » qui, à $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$, associe $\sum_{j=1}^{n} x_j e_j$: cette application est linéaire (vérifier !) et bijective car $\mathbf{e}$ est une base. Eh bien, $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}$ en est la bijection réciproque.

3° Matrice d'une application linéaire

a) Construction de la matrice

Définition. Soient E et F deux espaces vectoriels, $\mathbf{e} = (e_1, \dot{;} e_n)$ et $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ des bases respectives de ces espaces et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. On appelle *matrice de φ dans les bases* $\mathbf{e}$ *et* $\mathbf{f}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi)$ la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ définie ainsi : la j-ème colonne de A est la colonne des coordonnées de l'image du j-ème vecteur. Plus précisément :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathbf{f}}\big(\varphi(e_j)\big) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad \text{i.e. : } \varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i.$$

Exemple. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{I}_n$ la matrice $n \times n$ dont le coefficient d'indice (i, j) vaut 1 lorsque $i = j$ et 0 sinon. Soit de plus E un espace de dimension n et $\mathbf{e}$ une base de E, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(\mathrm{Id}_E) = \mathbf{I}_n$.

b) Un isomorphisme

Proposition. *Soient E et F deux espaces vectoriels,* $\mathbf{e} = (e_1, \dot{;} e_n)$ *et* $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ *des bases respectives de ces espaces. L'application* $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}} : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *est un isomorphisme.*

L'idée, c'est qu'une application linéaire est déterminée par l'image d'une base et qu'une famille de n vecteurs est déterminée par n colonnes de coordonnées, que l'on peut regrouper dans une matrice.

Démonstration. La linéarité de l'application $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}$ se vérifie avec quelque lourdeur mais sans difficultés. Elle est bijective en vertu des faits suivants : d'une part, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il existe une unique famille $(w_1, \dots, w_n)$ de F telle que la matrice de w_j dans $\mathbf{f}$ est la j-ème colonne de A ; d'autre part, pour toute famille $(w_1, \dots, w_n)$ de F, il existe une unique application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\varphi(e_j) = w_j$ pour tout j.

Corollaire. *Pour E et F espaces de dimensions finie, on a :* $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim(E) \dim(F)$.

c) Produit d'une matrice par un vecteur

Définition. Soient m et n deux entiers naturels non nuls. Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $X = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathbb{K}^m$, on définit le produit $AX \in \mathbb{K}^m$ par :

$$AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix}.$$

Exercice. Avec les notations de la définition, l'application $\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $X \mapsto AX$ est linéaire. Si on munit $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ des bases canoniques $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi_A) = A.$$

d) Calcul de l'image d'un vecteur

Proposition. *La matrice de l'image d'un vecteur est le produit de la matrice par la matrice du vecteur. En symboles, soient E et F deux espaces vectoriels, $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ des bases respectives de ces espaces, $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire et $A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi)$. Soient v dans E, $X = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(v)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathbf{f}}\big(\varphi(v)\big)$. Alors :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{f}}\big(\varphi(v)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi)\,\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(v), \quad \textit{i.e. : } Y = AX.$$

Démonstration. Si $v = \sum_{j=1}^n x_j e_j$, on a par linéarité :

$$\varphi(v) = \varphi\Big(\sum_{j=1}^n x_j e_j\Big) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_j a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\Big) f_i.$$

4° Composée et produit

a) Un calcul

Soient D, E et F trois espaces vectoriels de dimension finie, soient $\mathbf{d} = (d_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$, $\mathbf{e} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $\mathbf{f} = (f_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ des bases respectives de ces espaces, et soient $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(D,E)$ deux applications linéaires. On note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi)$ et $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} = \mathrm{Mat}_{\mathbf{d},\mathbf{e}}(\psi)$.
On cherche la matrice de $\varphi \circ \psi$ dans les bases $\mathbf{d}$ et $\mathbf{f}$. Pour cela, on fixe $k \in \{1, \dots, p\}$ et on calcule $\varphi \circ \psi(d_k)$:

$$\varphi\circ\psi(d_k) = \varphi\Big(\sum_{j=1}^n b_{jk} e_j\Big) = \sum_{j=1}^n b_{jk} \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^n b_{jk} \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} b_{jk} f_i = \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}\Big) f_i.$$

b) Produit de matrices

Le calcul précédent rend naturelle la définition suivante.

Définition. Soient $m, n, p \in \mathbb{N}^*$; $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle *produit* de A par B la matrice $AB = (c_{ik})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant k \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,k) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, p\}, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

Mise en garde. *Étant données $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$, le produit AB n'est défini que si $r = n$: le nombre de lignes de A doit être égal au nombre de colonnes de B.*
Même si $r = n$, le produit BA n'a de sens que si $p = m$.
Même si $r = n$ et $p = m$, les produits AB et BA ne sont de même taille que si $m = n = r = p$ (deux matrices carrées de même taille).
Même si $m = n = r = p$, les produits AB et BA sont en général différents.

Exemple. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$.

Exemple. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\mathbf{I}_m A = A = A\mathbf{I}_n$.

Proposition. *Soient $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$; $A, A' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$; $B, B' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$; $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. Alors :*
(i) $(AB)C = A(BC)$;
(ii) $(\lambda A + \lambda' A')B = \lambda AB + \lambda' A'B$ *et* $A(\lambda B + \lambda' B') = \lambda AB + \lambda' AB'$.

Démonstration. Laissée à la patience du lecteur.

c) Recollement des morceaux

Proposition (Matrice de la composée). *La matrice de la composée est la composée des matrices. En symboles, si D (resp. E, F) a pour base $\mathbf{d}$ (resp. $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$) et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\psi \in \mathcal{L}(D, E)$, on a :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{d},\mathbf{f}}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi)\, \mathrm{Mat}_{\mathbf{d},\mathbf{e}}(\psi).$$

Démonstration. Déjà faite !

5° Endomorphismes et matrices carrées

a) Un nouvel anneau

Lorsque les deux indices sont égaux, on note : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Corollaire. *La somme et le produit de matrices font de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ un anneau. (Le neutre de la somme est la matrice nulle 0, le neutre du produit est l'identité $\mathbf{I}_n$.)*

Exemple (Calcul intéressant !). Sachant que le parenthésage n'importe pas, on calcule :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Inversibilité

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que P est *inversible* s'il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $PQ = \mathbf{I}_n = QP$.
On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble [1] des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions n et m et soient $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ des bases respectives de ces espaces, $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et $A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi)$. Alors, φ est bijective si et seulement si A est inversible. Cela ne peut se produire que si $m = n$.*

Démonstration. Soit $\psi : F \to E$ une application linéaire et $B = \mathrm{Mat}_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(\psi)$ sa matrice. On a vu les relations : $\mathrm{Mat}_{\mathbf{f}}(\varphi \circ \psi) = AB$ et, symétriquement : $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(\psi \circ \varphi) = BA$. Comme $\mathrm{Mat}_{\mathbf{f}}$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(F, F)$ dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et que $\mathrm{Mat}_{\mathbf{f}}(\mathrm{Id}_F) = \mathbf{I}_m$, on a : $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_F$ si et seulement si $AB = \mathbf{I}_m$. De même : $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$ si et seulement si $BA = \mathbf{I}_n$. Ainsi, ψ est l'inverse de φ si et seulement si B est l'inverse de A.

1. En fait, c'est un groupe.

II Changement de base

1° Cas des vecteurs

a) Matrice de changement de base

Définition. Soit E un espace vectoriel ayant pour bases $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathbf{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ et soit $P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}$ la matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$.

Remarque. Par définition de ces matrices, on a : $P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'} = mat_{\mathbf{e}',\mathbf{e}}(\mathrm{Id}_E)$. (Attention à l'inversion de l'ordre des bases !)

Lemme. *Avec les notations ci-dessus, $P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}$ est inversible et on a : $P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'} = P_{\mathbf{e}',\mathbf{e}}$.*

Démonstration. De $\mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E$, on tire : $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}',\mathbf{e}}(\mathrm{Id}_E)\,\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}(\mathrm{Id}_E)$, puis : $\mathbf{I}_n = P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}P_{\mathbf{e}',\mathbf{e}}$. En échangeant le rôle des bases, il vient : $\mathbf{I}_n = P_{\mathbf{e}',\mathbf{e}}P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}$.

L'observation suivante sera commode (pas vue en amphi).

Lemme. *Soient E un espace vectoriel de dimension n, $\mathbf{e}$ une base de E et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Il existe une unique base $\mathbf{e}'$ de E telle que $P = P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}$.*

Démonstration. Considérons l'application linéaire $\psi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{e}}(\psi) = P$. Comme P est inversible, ψ est un isomorphisme : par suite, l'image de la base $\mathbf{e}$ est une base $\mathbf{e}'$ de E. Or, $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}$ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{K}^n$ qui envoie $\mathbf{e}'$ sur les colonnes de P. Par suite, on a : $P = P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}$. L'unicité d'une telle base est évidente car la matrice de passage détermine les coordonnées des vecteurs de $\mathbf{e}'$ dans $\mathbf{e}$.

Remarque. Il est amusant de voir que l'on joue sur deux interprétations de P : comme matrice d'une application non triviale dans une base $\mathbf{e}$ et comme matrice de l'application triviale Id_E dans les bases $\mathbf{e}'$ et $\mathbf{e}$.

b) Formule de changement de base

Proposition. *Soit E un espace vectoriel ayant pour bases $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathbf{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ et soit $P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}$ la matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$. Soit v un vecteur de E et soient $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(v)$ et $X' = (x'_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}'}(v)$. Alors, on a :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(v) = P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}\,\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}'}(v), \quad \textit{i.e.} : X = PX'.$$

Démonstration. On a : $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j$ et, pour tout j : $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$, avec $P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'} = (p_{ij})$. On remplace :

$$v = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p_{ij} x'_j e_i = \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j\Big) e_i.$$

Par unicité de l'écriture de v comme combinaison linéaire de $\mathbf{e}$, on trouve : $x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j$ pour tout i, ce qui donne : $X = PX'$ comme souhaité.

2° Cas des applications linéaires

Proposition. *Soit E (resp. F) un espace vectoriel ayant pour bases $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathbf{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ (resp. $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ et $\mathbf{f}' = (f'_1, \ldots, f'_m)$). Soient $P = P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}$ et $Q = P_{\mathbf{f},\mathbf{f}'}$ les matrices de passage. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ et soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(A)$ et $A' = (a'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}',\mathbf{f}'}(A')$. Alors, on a :*

$$A = QA'P^{-1}.$$

Démonstration. On écrit la matrice de φ dans les bases $\mathbf{e}'$ et $\mathbf{f}$ en partant de l'évidence : $\varphi = \mathrm{Id}_F \circ \varphi = \varphi \circ \mathrm{Id}_E$. On note en indice la base dans laquelle on va écrire la matrice :

$$\begin{tikzcd} E_{\mathbf{e}'} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"'] \arrow[dr, "\varphi"] & F_{\mathbf{f}'} \arrow[d, "\mathrm{Id}_F"] \\ E_{\mathbf{e}} \arrow[r, "\varphi"] & F_{\mathbf{f}}. \end{tikzcd}$$

Il vient, puisque la matrice de la composée est le produit des matrices :

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}',\mathbf{f}}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathbf{f}',\mathbf{f}}(\mathrm{Id}_F)\,\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}',\mathbf{f}'}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi)\,\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}',\mathbf{e}}(\mathrm{Id}_E),$$

puis, vu que $\mathrm{Mat}_{\mathbf{f}',\mathbf{f}}(\mathrm{Id}_F) = P_{\mathbf{f},\mathbf{f}'}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}',\mathbf{e}}(\mathrm{Id}_F) = P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}$:

$$QA' = AP.$$

III Rang [traité un peu rapidement en amphi]

1° Rang d'une matrice

Définition. Soient m et n deux entiers et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On note φ_A l'application linéaire

$$\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ X & \longmapsto & AX. \end{array}$$

On appelle *noyau* de A et on note $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau de φ_A ; on appelle *image* et on note $\mathrm{Im}(A)$ l'image de φ_A ; enfin, on appelle *rang* de A et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang de φ_A.

Remarque. Le noyau de A est l'ensemble des $X \in \mathbb{K}^n$ solutions du système $AX = 0$. L'image est l'ensemble des AX lorsque X décrit $\mathbb{K}^n$. On vérifie que AX est la combinaison linéaire $\sum_{j=1}^n x_j C_j$ des colonnes C_j de A. Ainsi, l'image de A est l'espace engendré par les colonnes de A et le rang de A est sa dimension.

Lemme. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors : A est inversible SSI $\mathrm{Ker}\,A = \{0\}$ SSI $\mathrm{rg}(A) = n$.*

Démonstration. On a : $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\varphi_A)$ et φ_A est bijective si et seulement si A est inversible.

2° Rang d'une matrice et d'une application linéaire

Proposition. *Soient E et F deux espaces vectoriels, $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ des bases respectives de ces espaces, $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire et $A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi)$. Alors : l'application linéaire $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}$ (resp. $\mathrm{Mat}_{\mathbf{f}}$) est un isomorphisme de $\mathrm{Ker}\,\varphi$ sur $\mathrm{Ker}\,A$ (resp. de $\mathrm{Im}\,\varphi$ sur $\mathrm{Im}\,A$). En particulier, on a :*

$$\mathrm{rg}\,\varphi = \mathrm{rg}\,A.$$

Démonstration. Soit $v \in E$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(v)$. Puisque $\mathrm{Mat}_{\mathbf{f}}\big(\varphi(v)\big) = AX$ et que $\mathrm{Mat}_{\mathbf{f}}$ est injective, on a une équivalence : $\varphi(v) = 0$ si et seulement si $AX = 0$, c'est-à-dire : $v \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(v) \in \mathrm{Ker}\,A$.
D'autre part, l'image de φ est engendrée par les $\varphi(e_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ et l'image de A est engendrée par les colonnes de A, qui sont par définition les $\mathrm{Mat}_{\mathbf{f}}\big(\varphi(e_j)\big)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Comme l'application $\mathrm{Mat}_{\mathbf{f}}$ est un isomorphisme, elle envoie l'image de φ sur l'image de A. (Pourquoi ?)

Corollaire. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. Alors :*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(Q^{-1}AP).$$

Démonstration. Soient $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ les bases canoniques de $E = \mathbb{K}^n$ et $F = \mathbb{K}^m$. Soient $\mathbf{e}'$ et $\mathbf{f}'$ les bases de E et F telles que $P = P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}$ et $Q = P_{\mathbf{f},\mathbf{f}'}$. Par la formule de changement de base, $A' = Q^{-1}AP$ est la matrice de φ_A dans $\mathbf{e}'$ et $\mathbf{f}'$. Par la proposition précédente, on a donc : $\mathrm{rg}\,A = \mathrm{rg}\,\varphi_A = \mathrm{rg}\,A'$.

3° Version matricielle du théorème du rang [non traité]

Théorème (hors programme)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. Il existe des matrices inversibles P et Q et un entier $r \in \mathbb{N}$ tels que*

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, r est le rang de A.

Démonstration. Soit $\mathbf{e}$ (resp. $\mathbf{f}$) la base canonique de $\mathbb{K}^n$ (resp. $\mathbb{K}^m$), soit $(e'_1, \ldots, e'_r)$ une base d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(A)$ et soit $(e'_{r+1}, \ldots, e'_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(A)$. Soit $f'_j = \varphi_A(e'_j)$ pour j entre 1 et r. Par la « version abstraite » du théorème du rang, la famille $(f'_1, \ldots, f'_r)$ est une base de $\mathrm{Im}\,\varphi_A$. On la complète en une base $\mathbf{f'}$ de $\mathbb{K}^m$. Par construction de ces bases, la matrice de φ_A dans les bases $\mathbf{e}'$ et $\mathbf{f}'$ est celle qui apparaît dans le théorème. En posant $P = P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}$ et $Q = P_{\mathbf{f},\mathbf{f}'}$, la formule de changement de base permet alors de conclure.

Corollaire. *Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.*

Démonstration. Exercice instructif.

IV Systèmes et opérations sur les rangées

1° Étude abstraite des systèmes linéaires

On donne m et n entiers et un système de m équations à n inconnues : $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^m = \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$. On cherche les $X \in \mathbb{K}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $AX = B$.
On considère à nouveau l'application $\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $X \mapsto AX$.

a) Première discussion

On distingue deux cas :

1. soit $B \notin \mathrm{Im}\,\varphi_A$: alors, le système n'a pas de solution ;
2. soit $B \in \mathrm{Im}\,\varphi_A$: alors il existe un élément $X_1 \in \mathbb{K}^n$ tel que $AX_1 = B$; mais alors, on a équivalence :

$$\begin{aligned} AX = B &\iff AX = AX_1 \iff A(X - X_1) = 0 \iff X - X_1 \in \mathrm{Ker}(A) \\ &\iff \exists X_0 \in \mathrm{Ker}(A),\ X = X_1 + X_0. \end{aligned}$$

Cela traduit la relation [2] :

$$\boxed{\text{SGEASM} = \text{SPEASM} + \text{SGESSM.}}$$

On dit que l'ensemble des solutions est un *espace affine* : c'est l'image d'un sous-espace vectoriel (ici, $\mathrm{Ker}(A)$) par une translation (ici, $X \mapsto X + X_1$).
La situation est évidemment réminiscente des équations différentielles linéaires que l'on travaille en analyse ces temps-ci. Et pour cause : elles sont linéaires !

b) Deuxième discussion

On distingue deux cas :

1. soit A est carrée et inversible : alors, pour tout second membre B, il existe une unique solution : $AX = B$ équivaut à : $X = A^{-1}B$;
2. soit A est carré et non inversible : alors :

2. Où SGEASM = solution générale de l'équation avec second membre ; SPEASM = solution particulière de l'équation avec second membre ; SGESSM = solution générale de l'équation sans second membre.

— si $B \in \mathrm{Im}(A)$ (cela existe), il y a strictement plus d'une solution (et même une infinité dès que le corps $\mathbb{K}$ est infini) ;

— si $B \notin \mathrm{Im}(A)$ (cela existe), il n'y a aucune solution ;

3. soit A n'est pas carrée (alors elle n'est pas inversible) : il existe des valeurs de B pour lesquelles le système n'admet pas de solutions ou alors il en admet strictement plus d'une (et même une infinité dès que le corps $\mathbb{K}$ est infini).

2° Opérations sur les rangées

a) Matrices des opérations élémentaires

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbf{I}_p$ la matrice identité d'ordre p, $E_{i,j}^{(p)}$ la matrice $p \times p$ dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 et les autres 0. On considère les matrices $p \times p$ suivantes (D pour dilatation, T pour transvection, P pour permutation) :

$$\begin{array}{c} 1 \leqslant i \leqslant p, \\ \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha \neq 0 \end{array} \qquad D_i^{(p)}(\alpha) = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & & \\ & \alpha & \\ & & \mathbf{I}_{p-i-1} \end{pmatrix};$$

$$\begin{array}{c} 1 \leqslant i \neq j \leqslant p, \\ \lambda \in \mathbb{K} \end{array} \qquad T_{i,j}^{(p)}(\lambda) = \mathbf{I}_p + \lambda\, E_{i,j}^{(p)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \lambda & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \text{ en position } (i,j))\,;$$

$$1 \leqslant i < j \leqslant p \qquad P_{i,j}^{(p)} = P_{j,i}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & & & & \\ & 0 & \dots & 1 & \\ & & \mathbf{I}_{j-i-1} & & \\ & 1 & \dots & 0 & \\ & & & & \mathbf{I}_{p-j-1} \end{pmatrix} \quad (\text{les 1 en } (i,j) \text{ et } (j,i)).$$

Exercice. Montrer que ces matrices sont inversibles. Plus précisément : $D_i^{(p)}(\alpha)^{-1} = D_i^{(p)}(\alpha^{-1})$; $T_{i,j}^{(p)}(\lambda)^{-1} = T_{i,j}^{(p)}(-\lambda)$; $\left(P_{i,j}^{(p)}\right)^{-1} = P_{i,j}^{(p)}$. (Commencer par $p = 2$.)

Exercice. Dans l'esprit du ≪ calcul intéressant ≫ ci-dessus, montrer que l'on a :

$$D_i(-1)T_{i,j}(-1)T_{j,i}(1)T_{i,j}(-1) = P_{i,j}.$$

b) Presque-définition des opérations élémentaires

On se donne aussi une matrice A de taille $m \times n$. On note $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ ses lignes $(C_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ ses colonnes. Une opération typique consiste à multiplier la i-ème ligne de A par α, ce que l'on notera : $L_i \leftarrow \alpha\, L_i$.

Exemple $(m = n = 2)$. On peut réaliser ces opérations élémentaires par des produits matriciels.

$L_2 \leftarrow \alpha L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix},$$

$C_2 \leftarrow \alpha C_2$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \alpha b \\ c & \alpha d \end{pmatrix},$$

$L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \lambda c & b + \lambda d \\ c & d \end{pmatrix},$$

$C_2 \leftarrow C_2 + \lambda C_1$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b + \lambda a \\ c & d + \lambda c \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, en multipliant à gauche et à droite une matrice par des matrices inversibles, on peut effectuer des « opérations élémentaires » sur les « rangées », c'est-à-dire les lignes et les colonnes :

— multiplier une rangée par une constante non nulle ;
— ajouter à une rangée un multiple d'une autre (ou, en répétant, une combinaison linéaire des autres) ;
— permuter deux rangées.

Plus précisément, on peut montrer le lemme suivant.

Lemme (Notations ci-dessus)**.** *Il y a une correspondance entre opérations élémentaires et produit par les matrices précédentes.*

produit	$D_i^{(m)}(\alpha)\,A$	$T_{i,j}^{(m)}(\lambda)\,A$	$P_{i,j}^{(m)}\,A$	$A\,D_i^{(n)}(\alpha)$	$A\,T_{i,j}^{(n)}(\lambda)$	$A\,P_{i,j}^{(n)}$
opération	$L_i \leftarrow \alpha\, L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda\, L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$	$C_i \leftarrow \alpha\, C_i$	$C_j \leftarrow C_j + \lambda\, C_i$	$C_i \leftrightarrow C_j$

De plus, ces opérations préservent le rang ? (Pourquoi au fait ?)

c) Applications

Les techniques précédentes jointes à l'algorithme du pivot de Gauss permettent de démontrer les résultats suivants (exercices).

Proposition. *À l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes (les équations) et de permutations des colonnes (et des inconnues), on peut transformer tout système linéaire $AX = B$ en un système équivalent $A'X' = B'$ de la forme :*

$$\begin{cases} a'_{11}x'_1 & +\cdots & +a'_{1r}x'_r & +a'_{1,r+1}x'_{r+1}+ & \cdots & a'_{1n}x'_n & = & b'_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & +a'_{rr}x'_r & +a'_{r,r+1}x'_{r+1}+ & \cdots & a'_{rn}x'_n & = & b'_r \\ & & & & & 0 & = & b'_{r+1} \\ & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & 0 & = & b'_s \end{cases}$$

où $X' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ est une permutation de $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $a'_{11} \neq 0, \ldots,$ $a'rr \neq 0$.

Ce système est facile à résoudre :

— si $s > r$ et l'un des b_i est non nul ($i > r$), il n'y a pas de solution ;
— sinon, pour chaque valeur de $(x'_{r+1}, \ldots, x'_n)$, on trouve successivement $x'_r, \ldots, x'_1$, c'est-à-dire une solution unique du système : l'ensemble des solutions est, comme on l'a vu au début de cette partie, un espace affine de dimension $n - r = \dim \mathrm{Ker}(A)$.

Pour référence ultérieure, mentionnons un dernière conséquence du pivot de Gauss.

Proposition. *Soit A une matrice carrée $n \times n$. Il existe des transvections $T_1, \ldots, T_s, T'_1, \ldots, T'_{s'}$ et une matrice diagonale D telles que*

$$A = T_1 \cdots T_r D T'_1 \cdots T'_{r'}.$$

Démonstration. Exercice... pas si facile à rédiger !