Université Claude Bernard–Lyon I
L1 de Mathématiques : Math. II Algèbre (parcours prépa.)
Année 2014 – 2015

Fractions rationnelles
complément au cours du 23/2

Décomposition en élément simples de $F(X) = \dfrac{1}{X(X^4+1)}$

Première étape : calculer la partie entière. C'est 0 car le degré de F est strictement négatif.
Deuxième étape : factoriser le dénominateur.

Première version : On a : $X^4+1 = \big(X^2+1\big)^2 - 2X^2 = \big(X^2+\sqrt{2}X+1\big)\big(X^2-\sqrt{2}X+1\big)$. Ces deux polynômes sont dépourvus de racine réelle donc on a la factorisation.

Deuxième version : On factorise dans $\mathbb{C}[X]$ et on regroupe les facteurs conjugués : les racines quatrièmes de -1 sont $e^{i\pi/4+k\pi/2}$ $(0 \le k \le 3)$, c'est-à-dire $e^{\pm i\pi/4}$ et $e^{\pm 3i\pi/4}$, d'où :

$$\begin{aligned} X^4+1 &= \big(X-e^{i\pi/4}\big)\big(X-e^{-i\pi/4}\big)\big(X-e^{3i\pi/4}\big)\big(X-e^{-3i\pi/4}\big) \\ &= \big(X^2 - 2X\cos\frac{\pi}{4}+1\big)\big(X^2+2X\cos\frac{3\pi}{4}+1\big) \\ &= \big(X^2-\sqrt{2}X+1\big)\big(X^2+\sqrt{2}X+1\big). \end{aligned}$$

Troisième étape : forme *a priori* de la décomposition. C'est, pour a, b, c, b', c' réels à déterminer :

$$F(X) = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{b'X+c'}{X^2-\sqrt{2}X+1}.$$

Quatrième étape : calcul de a. C'est facile en multipliant par X et en évaluant en $X=0$:

$$\frac{1}{X^4+1} = XF(X) = a + XG(X)$$

où G n'a pas de pôle en 0, c'est-à-dire que 0 n'est pas une racine du dénominateur de G. En évaluant en $X=0$, on trouve : $\boxed{a=1}$.

Cinquième étape : calcul de b et c. On commence comme avec un pôle simple, c'est-à-dire que l'on multiplie par $X^2+\sqrt{2}X+1$:

$$\frac{1}{X\big(X^2-\sqrt{2}X+1\big)} = bX+c+\big(X^2+\sqrt{2}X+1\big)H(X)$$

avec H sans pôle en les racines complexes de $X^2+\sqrt{2}X+1$, c'est-à-dire que le dénominateur de H est premier avec $X^2+\sqrt{2}X+1$.
On va évaluer en $X=\alpha$, où α est une des deux racines de $X^2+\sqrt{2}X+1$. Commençons par calculer une racine α.

Première version. Discriminant : $\sqrt{2}^2-4=-2$; racines : $\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ et $\overline{\alpha}$.

Deuxième version. Le polynôme $X^2+\sqrt{2}X+1$ a été obtenu par développement de $\big(X-e^{3i\pi/4}\big)\big(X-e^{-3i\pi/4}\big)$, ce qui donne (évidemment) les même racines.

On a donc, en revenant à F :

$$\frac{1}{\alpha\big(\alpha^2-\sqrt{2}\alpha+1\big)} = b\alpha+c+0.$$

Il reste à simplifier.

Première version : on peut tout exprimer en fonction de i

$$\alpha\big(\alpha^2-\sqrt{2}\alpha+1\big) = \Big(\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\Big)\left(\Big(\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\Big)^2-\sqrt{2}\Big(\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\Big)+1\right) = 2\sqrt{2}i,$$

puis on passe à l'inverse et on chasse les dénominateurs :

$$b\Big(\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\Big)+c = \frac{1}{2\sqrt{2}i} = \frac{-i}{2\sqrt{2}},$$

ce qui donne en séparant parties réelle et imaginaire : $\dfrac{b}{\sqrt{2}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$, soit $\boxed{b = -\dfrac{1}{2}}$ puis : $\boxed{c = \dfrac{b\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$.

Deuxième version : on peut aussi calculer avec α : en effet, $\alpha(-\alpha-\sqrt{2}) = 1$ donc l'inverse de α est $-\alpha-\sqrt{2}$; et $\alpha^2 = -\sqrt{\alpha}-1$ donc $\alpha^2-\sqrt{2}\alpha+1 = -2\sqrt{2}\alpha$, puis :

$$b\alpha+c = \frac{1}{-2\sqrt{2}\alpha^2} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\big(-\alpha-\sqrt{2}\big)^2 = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\big(\alpha^2+2\sqrt{2}\alpha+2\big) = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\big(\sqrt{2}\alpha+1\big) = -\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Comme α n'est pas réel, on a : $\boxed{b = -\dfrac{1}{2}}$ (sinon on aurait $\alpha = \frac{-c-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{b+\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$) et $\boxed{c = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$.

Sixième étape : calcul de b' et c'. On exploite le fait que F est impaire :

$$\begin{aligned}
-F(X) &= \frac{-a}{X}+\frac{-bX-c}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\frac{-b'X-c'}{X^2-\sqrt{2}X+1}\\
F(-X) &= \frac{-a}{X}+\frac{-bX+c}{X^2-\sqrt{2}X+1}+\frac{-b'X+c'}{X^2+\sqrt{2}X+1}
\end{aligned}$$

donc par unicité de la décomposition en éléments simples, on trouve : $\boxed{b'=b}$ et $\boxed{c'=-c}$.

Septième étape : on récapitule :

$$\frac{1}{X(X^4+1)} = \frac{1}{X}+\frac{-\frac{1}{2}X-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{X^2+\sqrt{2}X+1}+\frac{-\frac{1}{2}X+\frac{1}{2\sqrt{2}}}{X^2-\sqrt{2}X+1}.$$

Comme on le voit, les calculs deviennent vite un peu pénibles.