Université Claude Bernard–Lyon I
L1 de Mathématiques : Math. II Algèbre (parcours prépa.)
Année 2014–2015

Fractions rationnelles

On fixe un corps $\mathbb{K}$. On connaît l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[X]$, dont l'arithmétique est si semblable à celle de $\mathbb{Z}$. On poursuit cette analogie en plongeant $\mathbb{K}[X]$ dans un corps, appelé corps des fractions rationnelles, de la même façon que l'on a, petit, plongé $\mathbb{Z}$ dans le corps des rationnels $\mathbb{Q}$: tout polynôme non nul y a un inverse, de même que toute fraction non nulle, et ce corps est aussi petit que possible.

NB : ce document comporte douze pages mais les six dernières portent sur la question générale du « passage au quotient » (grand intérêt mais hors programme).

I Construction du corps des fractions rationnelles

1° Esquisse

a) Propriétés importantes

Au départ, $\mathbb{K}[X]$ est un *anneau* : on a une addition $+$, un produit $\cdot$, un neutre pour l'addition 0, un opposé pour chaque polynôme, un neutre pour le produit 1 et quelques règles de calcul (associativités, distributivité).

Ce qui permet d'espérer inverser tous les polynômes non nuls, c'est que $\mathbb{K}[X]$ est *intègre* : un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul. En symboles : si A et B sont deux polynômes, $AB = 0$ SSI $\big(A = 0$ ou $B = 0\big)$.

b) Ce que l'on voudrait

C'est, à l'image de $\mathbb{Q}$, qui est formé des fractions a/b où a et b sont deux entiers, b non nul, un corps où ont un sens des expressions comme A/B, où A et B sont deux polynômes, B non nul. Mais qu'est-ce que A/B ?

Le point clé, c'est que si les règles de calculs usuelles s'appliquent, on aura, chaque fois que K est un polynôme non nul : $(AK)/(BK) = A/B$. Ainsi, on ne peut pas identifier la fraction A/B avec le couple (A, B) puisque plusieurs couples $[(A, B)$ et (KA, KB) pour K quelconque non nul$]$ décrivent la même fraction.

Quand est-ce que cela se produit ? Eh bien, toujours si tout se passe au mieux, une égalité de la forme $A/B = A_1/B_1$ doit être équivalente à $AB_1 = A_1B$. L'intérêt de cette forme, c'est qu'elle a un sens dans les polynômes : on va s'en servir comme définition.

On n'a guère le choix pour les opérations si on veut que les règles de calculs usuelles s'appliquent : par commutativité et associativité, on a nécessairement, si cela a un sens :

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD} \quad \text{et} \quad \frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD}{BD} + \frac{BC}{BD} = \frac{AD + BC}{BD}.$$

Eh bien, passons à l'offensive. On va *définir* le corps des fractions rationnelles comme l'ensemble des expressions A/B, où on *identifie* deux expressions A/B et $\tilde{A}/\tilde{B}$ lorsque $A\tilde{B} = \tilde{A}B$. On définit alors les opérations et il n'y a plus qu'à vérifier les règles de calculs (les axiomes) des corps. Beau programme, qui trouve sa réalisation grâce à la notion de *passage au quotient* qui est expliquée en détail dans l'annexe A. [1]

1. Cette notion n'est malheureusement pas au programme mais elle est indispensable pour comprendre la fabrication de concepts en mathématiques. Voir l'esquisse de la construction des nombres usuels à partir des naturels au § 3° de l'annexe.

2° Construction : le résultat

Tout ce qui est en gris peut être oubliée en première lecture. Voire en deuxième.

Proposition. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, X une indéterminée et $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes sur $\mathbb{K}$. Il existe un corps $\mathbb{K}(X)$ caractérisé par les conditions suivantes :*

(i) *le corps $\mathbb{K}(X)$ contient l'anneau $\mathbb{K}[X]$; plus précisément, il existe un morphisme d'anneaux injectif $\iota : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}(X)$;*

(ii) *les éléments de $\mathbb{K}(X)$ peuvent s'écrire A/B, où $A, B \in \mathbb{K}[X]$ et $B \neq 0$. Pour $A, B, \tilde{A}, \tilde{B} \in \mathbb{K}[X]$ avec $B\tilde{B} \neq 0$, on a : $A/B = \tilde{A}/\tilde{B}$ si et seulement si $A\tilde{B} = B\tilde{A}$;*

(iii) *pour $A, B, C, D \in \mathbb{K}[X]$, avec $BD \neq 0$, on a :*

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD} \quad \text{et} \quad \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD};$$

(iv) *le neutre de l'addition est $0 = 0/1$; le neutre du produit est $1 = 1/1$; l'opposé d'un élément A/B est $(-A)/B$; l'inverse d'un élément A/B avec $AB \neq 0$ est B/A.*

Enfin, le corps $\mathbb{K}(X)$ est unique. Plus précisément, si $j_0 : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{K}$ est un morphisme injectif de $\mathbb{K}[X]$ dans un corps, il existe un unique morphisme de corps prolongeant j_0, c'est-à-dire $j : \mathbb{K}(X) \to \mathcal{K}$ tel que $j = j_0 \circ \iota$.

3° Construction : la preuve (hors programme)

On va démontrer la proposition. Soit $\mathcal{E} = \mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$ l'ensemble des couples formés par un polynôme et un polynôme non nul.

Lemme. *Sur $\mathcal{E}$, la relation $\sim$ définie par :*

$$\forall (A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \mathcal{E}, \quad (A_1, B_1) \sim (A_2, B_2) \text{ si } A_1B_2 = A_2B_1.$$

est une relation d'équivalence.

Démonstration. Soient $(A_i, B_i) \in \mathcal{E}$ $(1 \leq i \leq 3)$. D'abord, $\sim$ est réflexive puisque $A_1B_1 = A_1B_1$; ensuite, elle est symétrique puisque $A_1B_2 = A_2B_1$ équivaut à $A_2B_1 = A_1B_2$.
Enfin, si $(A_1, B_1) \sim (A_2, B_2)$ et $(A_2, B_2) \sim (A_3, B_3)$, alors $A_1B_2 = A_2B_1$ et $A_2B_3 = A_3B_2$ d'où : $A_1B_2B_3 = A_2B_1B_3 = B_1A_3B_2$, si bien que $B_2(A_1B_3 - A_3B_1) = 0$ et, vu que $B_2 \neq 0$, il vient : $A_1B_3 = A_3B_1$, c'est-à-dire : $(A_1, B_1) \sim (A_3, B_3)$.

Définition. L'ensemble $\mathbb{K}(X)$ est le quotient de $\mathcal{E}$ par la relation $\sim$ (au sens de l'annexe A). Pour $(A, B) \in \mathcal{E}$, on note A/B la classe d'équivalence de (A, B). On dit *a contrario* que (A, B) est un *représentant* de A/B.

On veut à présent définir le produit et la somme de deux éléments F et G de $\mathbb{K}(X)$. Pour définir FG, on travaille à partir de représentants ; il faut montrer que le résultat ne dépend pas du choix. C'est le rôle du lemme suivant.

Lemme. *Soient (A_1, B_1), (A_2, B_2), (C_1, D_1) et (C_2, D_2) des éléments de $\mathcal{E}$ tels que $(A_1, B_1) \sim (A_2, B_2)$ et $(C_1, D_1) \sim (C_2, D_2)$.*
Alors, on a : $(A_1D_1 + B_1C_1, B_1D_1) \sim (A_2D_2 + B_2C_2, B_2D_2)$ et $(A_1C_1, B_1D_1) \sim (A_2C_2 \sim B_2D_2)$.

Démonstration. On sait que l'on a :

$$A_1B_2 = A_2B_1 \text{ et } C_1D_2 = C_2D_1.$$

On en déduit d'abord, par produit : $A_1C_1B_2D_2 = A_2C_2B_1D_1$, ce qui prouve la deuxième assertion ; d'autre part :

$$\begin{aligned}(A_1D_1 + B_1C_1)B_2D_2 &= A_1B_2D_1D_2 + C_1D_2B_1B_2\\ &= A_2B_1D_1D_2 + C_2D_1B_1B_2\\ &= (A_2D_2 + B_2C_2)B_1D_1.\end{aligned}$$

Définition. Étant données deux fractions $F, G \in \mathbb{K}(X)$, on choisit des représentants (A, B) de F et (C, D) de G – c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{E}$ tels que $F = A/B$ et $G = C/D$. Grâce au lemme, les définitions suivantes ne dépendent que de F et G et pas du choix de (A, B) et (C, D) :

$$F + G = \frac{AD + BC}{BD} \quad \text{et} \quad FG = \frac{AC}{BD}.$$

Proposition. *Muni des opérations précédentes, $\mathbb{K}(X)$ a les propriétés suivantes :*

(i) *c'est un corps : le neutre de l'addition est $0 = 0/1$; le neutre du produit est $1 = 1/1$; l'opposé d'une fraction A/B est la fraction $(-A)/B$; l'inverse d'une fraction A/B avec $A, B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ est B/A ;*

(ii) *l'application $\iota : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}(X)$, $A \mapsto A/1$ est un morphisme d'anneaux injectif.*

La preuve est une vérification longue mais facile laissée au lecteur consciencieux. Cela démontre presque le théorème, sauf la partie « unicité » qui est passée sous silence.

4° Degré

Lemme. *Soient P, Q, $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ des polynômes non nuls tels que $P/Q = \tilde{P}/\tilde{Q}$. Alors on a : $\deg(P) - \deg(Q) = \deg(\tilde{P}) - \deg(\tilde{Q})$.*

Démonstration. Par définition, on a : $P\tilde{Q} = \tilde{P}Q$, d'où : $\deg(P) + \deg(\tilde{Q}) = \deg(\tilde{P}) + \deg(Q)$, et tous les degrés sont entiers car les polynômes ne sont pas nuls.

Définition. On appelle *degré* d'une fraction non nulle $F = P/Q$, où $P, Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, l'entier $\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$. Il est bien défini grâce au lemme précédent. Le degré de 0 est $-\infty$.

Exercice. Pour $F, G \in \mathbb{K}(X)$, $\deg(F+G) \leq \max\big(\deg(F), \deg(G)\big)$, $\deg(FG) = \deg(F)+\deg(G)$.

5° Représentant irréductible

Lemme. *Soit F une fraction non nulle. Il existe un unique couple (P, Q) de polynômes non nuls tels que $F = P/Q$, P et Q sont premiers entre eux et Q est normalisé/unitaire.*

Définition. Avec les notations du lemme, le couple (P, Q) ou, par abus de langage, l'expression P/Q, est appelé-e le *représentant irréductible* de F.

Démonstration. Prouvons d'abord l'unicité. Supposons que $F = P/Q = \tilde{P}/\tilde{Q}$ où $P \wedge Q = 1$, $\tilde{P} \wedge \tilde{Q} = 1$, Q et $\tilde{Q}$ normalisés. On a donc : $P\tilde{Q} = \tilde{P}Q$. Par le lemme de Gauss, comme Q divise $P\tilde{Q}$ et $P \wedge Q = 1$, on sait que Q divise $\tilde{Q}$; de même, $\tilde{Q}$ divise Q. Mais alors, il existe une constante non nulle α telle que $\tilde{Q} = \alpha Q$. Comme Q et $\tilde{Q}$ sont tous deux normalisés, il vient $\alpha = 1$ et l'unicité en découle.

Pour l'existence, partons d'un représentant (A, B) quelconque de F. On a donc : $F = A/B$. Soit D un PGCD de A et B, écrivons : $A = DP$ et $B = DQ$. Il vient : $F = P/Q$. De plus, on a : $P \wedge Q$; en effet, si E divise P et Q, alors DE divise $DP = A$ et $DQ = B$, si bien que DE divise D et que E est une constante. Enfin, quitte à remplacer Q par αQ et P par αP, où α est l'inverse du coefficient dominant de Q, on peut supposer que Q est normalisé. D'où l'existence d'un représentant irréductible.

Remarque. L'énoncé analogue sur $\mathbb{Q}$ est : pour tout rationnel non nul f, il existe un unique $p \in \mathbb{Z}$, un unique $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $f = p/q$ et $p \wedge q = 1$.

6° Pôle, évaluation hors d'un pôle

Définition. Soit x_0 un élément de $\mathbb{K}$. On dit que x_0 est un *pôle* d'une fraction $F \in \mathbb{K}(X)$ si x_0 est une racine du dénominateur Q du représentant irréductible (P, Q) de F.

Étant donnée une fraction F dont x_0 n'est pas un pôle, on définit l'évaluation de F en x_0 par :

$$F(x_0) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)},$$

où (P, Q) est le représentant irréductible de F. Si G est une autre fraction dont x_0 n'est pas un pôle, on vérifie sans peine que l'on a : $(F+G)(x_0) = F(x_0)+G(x_0)$ et $(FG)(x_0) = F(x_0)G(x_0)$.

7° Dérivation

Lemme. *Soient P, Q, $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ des polynômes avec $Q\tilde{Q} \neq 0$ et $P/Q = \tilde{P}/\tilde{Q}$. Alors :*

$$\frac{P'Q - PQ'}{Q^2} = \frac{\tilde{P}'\tilde{Q} - \tilde{P}\tilde{Q}'}{\tilde{Q}^2}.$$

Démonstration. Partir de $P\tilde{Q} = \tilde{P}Q$, dériver et multiplier par $Q^2\tilde{Q}^2$; réagencer les termes.

Définition. Soit F une fraction, on l'écrit $F = P/Q$ où P et Q sont des polynômes, Q non nul. Alors la fraction $(P'Q - PQ')/Q^2$ ne dépend que de F et pas du choix du représentant P/Q : on l'appelle *fraction dérivée* de F et on la note F'.

Exercice. Pour $F, G \in \mathbb{K}(X)$, on a : $(FG)' = F'G + FG'$.

II Décomposition en éléments simples

1° Énoncés

Définition. Soit F une fraction rationnelle. On dit que F est un *élément simple* s'il existe deux polynômes Q, R et un entier k tels que

$$F = \frac{R}{Q^k} \quad \text{avec } Q \text{ irréductible normalisé, } k \geq 1, \ \deg(R) < \deg(Q).$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on parle parfois d'*élément simple de première espèce* (resp. *de deuxième espèce*) lorsque $\deg(Q) = 1$ (resp. $\deg(Q) = 2$). [Pas dit en amphi.]

Théorème (Décomposition en éléments simples, v. 1). *Toute fraction rationnelle s'écrit, de façon unique à l'ordre des termes près, comme somme d'un polynôme et d'éléments simples.*

Théorème (Décomposition en éléments simples, v. 2). *Soit F une fraction rationnelle non nulle. Il existe un polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$, un entier naturel r, des polynômes irréductibles normalisés $Q_1, \ldots, Q_r$, des entiers naturels non nuls $m_1, \ldots, m_r$, des polynômes $R_{1,1}, \ldots, R_{1,m_1}$, $R_{2,1}, \ldots, R_{2,m_2}, \cdots$, $R_{r,1}, \cdots, R_{r,m_r}$ tels que :*

– *pour tout i et tout $k \leq m_i$, $\deg(R_{i,k}) < \deg(Q_i)$;*
– *pour tout i, $R_{i,m_i} \neq 0$;*
– *et surtout :*

$$F = E + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{R_{i,k}}{Q_i^k}.$$

De plus, cette décomposition est unique : E et r sont uniquement déterminés et la famille $(Q_i, m_i, (R_{i,k})_{1\leq k\leq m_i})_{1\leq i\leq r}$ sont uniques à permutation des indices i près.
Plus précisément, si P/Q est le représentant irréductible de F, alors E est le quotient de la division euclidienne de P par Q et $Q = \prod_{i=1}^{r} Q_i^{m_i}$.

2° Preuve de la décomposition

Démonstration. Unicité. Pour montrer que deux décompositions de même forme coïncident, on forme la différence : il s'agit alors de montrer que si

$$D + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{S_{i,k}}{Q_i^k} = 0, \tag{1}$$

où D polynôme, $Q_1, \ldots, Q_r$ irréductibles normalisés, $m_1, \ldots, m_r \geq 1$, $\deg(S_{i,k}) < \deg(Q_i)$ pour tout (i,k), alors $E = 0$ et $S_{i,k} = 0$ pour tout (i,k).
On procède par récurrence sur $m = \sum_{i=1}^{r} m_i$. Si $m = 0$, l'hypothèse s'écrit $D = 0$, il n'y a rien à démontrer. Soit $m \geq 1$, supposons la propriété vraie jusqu'à $m-1$. Notons $\hat{Q} = \prod_{i=2}^{r} Q_i^{m_i}$, de sorte que $\hat{Q}/Q_i^k$ est un polynôme pour tout i et tout $k \leq m_i$. L'hypothèse donne, en multipliant par $Q_1^{m_1}\hat{Q}$:

$$D\hat{Q}Q_1^{m_1} + \sum_{i=2}^{r} \sum_{k=1}^{m_i} S_{i,k} Q_1^{m_1} \frac{\hat{Q}}{Q_i^k} + \sum_{k=1}^{m_1-1} \hat{Q} S_{1,k} Q_1^{m_1-k} = -\hat{Q} S_{1,m_1}.$$

Le polynôme Q_1 divise le membre de gauche, donc il divise le membre de droite ; or, Q_1 est premier avec $\hat{Q}$, donc Q_1 divise S_{1,m_1} (lemme de Gauss) ; mais ce dernier est de degré strictement inférieur à celui de Q_1 ; par suite, on a : $S_{1,m_1} = 0$. Dans l'expression initiale, on peut donc remplacer m par $m-1$ en supprimant le terme S_{1,m_1} (si $m_1 = 1$, cela revient à supprimer Q_1 ; on est alors conduit à renuméroter les Q_i). Par hypothèse de récurrence, D et tous les $S_{i,k}$ sont nuls. Cela prouve l'unicité de la décomposition.

Soit P/Q le représentant irréductible de F. Soit $Q = \prod_{i=1}^{r} Q_i^{m_i}$ la factorisation de Q en produit d'irrédutibles normalisés.
Existence : cas particulier, $r = 1$. On suppose pour l'instant que $r = 1$. On veut donc décomposer une fraction irréductible de la forme $F = P/Q_1^{m_1}$. On procède par récurrence sur m_1. Pour $m_1 = 1$, il suffit d'effectuer la division euclidienne de P par Q_1 : on écrit $P = EQ_1 + R$ avec $\deg(R) < \deg(Q_1)$, ce qui donne :

$$F = E + \frac{R}{Q_1},$$

ce qui est une décomposition en éléments simples.
Soit m_1 un entier, on suppose que toute fraction de la forme P/Q_1^k avec Q_1 irréductible et $1 \leq k \leq m_1 - 1$ admet une décomposition en éléments simples. Soit alors une fraction de la forme $P/Q_1^{m_1}$, avec Q_1 irrédutible normalisé. On écrit à nouveau la division euclidienne de P par Q : on écrit $P = EQ_1 + R$ avec $\deg(R) < \deg(Q_1)$, ce qui donne :

$$F = \frac{E}{Q_1^{m_1-1}} + \frac{R}{Q_1^{m_1}}.$$

Par hypothèse de récurrence, le terme $E/Q_1^{m_1-1}$ admet une décomposition en éléments simples ; le terme $R/Q_1^{m_1}$ est un éléments simple. Cela conclut la récurrence emboîtée et permet d'affirmer que toute fraction de la forme $P/Q_1^{m_1}$ admet une décomposition en éléments simples.
Existence : cas général, r quelconque. On procède par récurrence sur r. Si $r = 0$, c'est que Q est une constante et que F est un polynôme – c'est-à-dire que $F = E$. On vient de traiter le cas $r = 1$, ce qui initialise la récurrence.
Soit $r \geq 2$. Supposons que toute fraction dont le dénominateur (du représentant irréductible) possède au plus $r - 1$ facteurs irréductibles distincts admette une décomposition en élements simples. Reprenons une fraction $F = P/\prod_{i=1}^{r} Q_i^{m_i}$ comme ci-dessus. Comme les polynômes Q_j sont deux à deux distincts, $Q_r^{m_r}$ et $\prod_{j=1}^{r-1} Q_j^{m_j}$ sont premiers entre eux. Grâce à l'identité de Bézout, on peut trouver des polynômes U et V tels que

$$UQ_i^{m_i} + V\prod_{j=1}^{r-1} Q_j^{m_j} = 1, \quad \text{d'où : } \frac{1}{Q} = \frac{V}{Q_r^{m_r}} + \frac{U}{\prod_{j=1}^{r-1} Q_j^{m_j}}.$$

On en tire :

$$F = \frac{PV}{Q_r^{m_r}} + \frac{PU}{\prod_{j=1}^{r-1} Q_j^{m_j}}.$$

Par hypothèse de récurrence, les deux termes de la somme ci-dessus admettent une décomposition en éléments simples, si bien que F elle-même en possède une. On peut conclure à l'existence de la décomposition en éléments simples. Les assertions les plus précises (lien entre les Q_i et la factorisation de Q, valeur de E...) sont admises.

Remarque. On peut formuler un énoncé analogue dans $\mathbb{Q}$: tout rationnel f peut s'écrire de façon unique (à l'ordre près) comme somme de la forme

$$f = e + \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{m_i} \frac{r_{i,k}}{q_i^k},$$

où e est relatif, $q_1, \ldots, q_s$ sont premiers positifs distincts et $0 \leq r_{i,k} < q_i$ pour tout (i, k).

Exemple. Voici un exemple... dans $\mathbb{Z}$! Soit $f = 179/2268$. Le dénominateur s'écrit : $2268 = 2^2 \times 3^4 \times 7$. On sépare $3^4 = 81$. Par l'algorithme d'Euclide, on trouve : $-26 \times 28 + 9 \times 81 = 1$ et, directement : $2 \times 4 - 7 = 1$. D'où $1/2268 = 9/28 - 1/81$ et $1/28 = 2/7 - 1/4$, puis :

$$f = \frac{179}{2268} = \frac{179 \times 9}{28} - \frac{179 \times 26}{81} = \frac{179 \times 9 \times 2}{7} - \frac{179 \times 9}{4} - \frac{179 \times 26}{81}.$$

On trouve la partie entière par division euclidienne : $179 \times 9 \times 2 = 460 \times 7 + 2$; $179 \times 9 = 402 \times 4 + 3$, d'où $-79 \times 9/4 = -403 \times 4 + 1$; $-179 \times 26/81 = -58 \times 81 + 44$. Il vient :

$$f = 460 + \frac{2}{7} - 403 + \frac{1}{4} - 58 + \frac{44}{81} = -1 + \frac{2}{7} + \frac{1}{4} + \frac{44}{81}.$$

Il n'y a plus qu'à exprimer 44 en base 3 : $44 = 27 + 17 = 27 + 9 + 2 \times 3 + 2$, d'où

$$\frac{179}{2268} = -1 + \frac{2}{7} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81}.$$

3° Quelques méthodes et astuces de calcul

La démarche habituelle dans les exercices est la suivante

1. *calcul de la partie entière E :* c'est le quotient de P par Q ;
2. *factorisation de Q ;* plus les exposants m_i sont grands, plus la décomposition sera pénible ;
3. *écriture de la forme* a priori *de la décomposition* ;
4. on procède alors facteur irréductible par facteur irréductible, c'est-à-dire que l'on fixe i et qu'on calcule tous les $R_{i,k}$;
5. *pôles :* si $\deg(Q_i) = 1$, alors $Q_i = X - x_i$ pour $x_i \in \mathbb{K}$ convenable : la méthode consiste à multiplier F par $(X - x_i)^{m_i}$, à simplifier et à évaluer en x_i ; puis à dériver et évaluer en x_i, etc. ; le coefficient $R_{i,1}$ de $1/(X - x_i)$ est appelé *résidu* de F en x_i, c'est en général le plus difficile à trouver ;
6. *facteurs de deuxième espèce sur $\mathbb{R}$:* si $\deg(Q_i) = 2$, alors $Q_i = X^2 + b_i X + c_i$ avec $b_i^2 - 4c_i < 0$: une méthode habituelle consiste à multipler F par $Q_i^{m_i}$, à simplifier et à évaluer en une racine complexe z_i de de Q_i ; si $m_i > 1$, on dérive et on évalue en z_i, etc. ;
7. *somme des résidus :* si $\deg(F) \leq -2$, alors la somme des résidus est nulle ; en effet [on suppose ici que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{C}$ ou un sous-corps de $\mathbb{C}$], la limite de $XF(X)$ lorsque $|X|$ tend vers $+\infty$ est d'une part 0 (hypothèse de degré) et d'autre part c'est la somme des résidus (vérifier) ;
8. *considérations de parité :* si F est paire ou impaire ($F(-X) = \pm F(X)$, avec des notations évidentes), cela se voit sur la décomposition : si Q_i apparaît au dénominateur, alors $Q_i(-X)$ apparaît aussi avec la même multiplicité m_i ; il existe donc i' tel que $Q_i(-X) = Q_{i'}(X)$; alors, $R_{i,k}(-X) = R_{i',k}(X)$; cela réduit le nombre de facteurs de Q à traiter ;
9. *division aux puissances croissantes :* si $F = P/Q$ avec $Q = X^m \hat{Q}$ avec m « grand », il peut être rentable de poser la division aux puissances croissantes de P par Q : cela donne les coefficients de $1/X^k$ $(1 \leq k \leq m)$; si $Q = (X - x_0)^m \hat{Q}$, on fait le changement de variable $Y = X - x_0$ et on procède de même.

*****

A Annexe : passage au quotient

1° L'idée

Le passage au quotient est la méthode formelle pour construire des concepts en mathématiques. Le mot-clé est : *identifier*, c'est-à-dire identifier deux éléments lorsqu'ils partagent certaines caractéristiques. Pour rester dans un registre philosophique, le but est de réunir la diversité des données à l'unité d'un concept ; il s'agit d'oublier la singularité d'un individu/élément pour ne retenir que certaines de ses propriétés/caractéristiques.

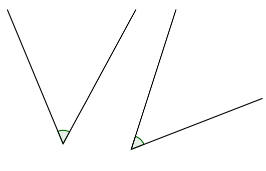

FIGURE 1 – Deux couples de demi-droites superposables, un seul angle

Par exemple, si deux couples de demi-droites de même sommet sont superposables, c'est-à-dire s'il existe une isométrie qui transporte le premier couple sur le deuxième, on dit qu'elles définissent le même angle. Informellement, l'angle est la propriété commune que possèdent deux couples de demi-droites que l'on peut superposer. Formellement, un angle est défini comme l'ensemble de tous les couples de demi-droites que l'on peut superposer. Le miracle, c'est qu'avec une définition de ce genre, on puisse manipuler les objets...

2° La version technique

a) Une relation binaire est caractérisée par une partie de $E \times E$; on dit qu'un élément x de E est en relation avec un élément y si le couple (x, y) appartient à cette partie. Par exemple, « être plus petit que » ou « avoir le même nombre d'éléments que » définissent des relations.
Informellement, une relation d'équivalence est une relation qui possède les propriétés de l'égalité. Rappelons-en la définition.

Définition. Soit E un ensemble et $\sim$ une relation sur E. On dit que la relation $\sim$ est une *relation d'équivalence* si elle est
– réflexive : $\forall x \in X,\ x \sim x$;
– symétrique : $\forall x, y \in X,\ x \sim y \iff y \sim x$;
– transitive : $\forall x, y, z \in X,\ x \sim y$ et $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$;

Exemple. On voit bien que ces propriétés sont fort souhaitables pour l'égalité ! Si $x = x$, alors $x = x$; si $x = y$, alors $y = x$; si $x = y$ et $y = z$, alors $x = z$. Le premier exemple de relation d'équivalence sur R est donc, naturellement, l'égalité.
Ce qui est étonnant, c'est que les trois propriétés de réfléxivité, symétrie et transitivité suffisent à décrire ce que l'on attend de l'égalité ; et mieux, à *fabriquer* de nouvelles égalités qui se comportent de façon satisfaisante – par le moyen du passage au quotient.

Exemple. Soit E un ensemble et f une application définie sur E à valeurs dans un autre ensemble qui n'importe pas ici. Alors la relation définie par : $x \sim y$ si $f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence. Ce qui est amusant, c'est que toute relation d'équivalence est de cette forme (voir plus loin).

Exemple. Soit $E = \mathbb{Z}$. La relation « avoir la même parité » est une relation d'équivalence.

Exemple. Prenons à nouveau $E = \mathbb{Z}$ et fixons un entier non nul n. On dit que deux entiers $x \sim y$ si $x - y$ est un multiple de n, i.e. s'il existe un entier k tel que $x - y = kn$. C'est une relation d'équivalence : $x \sim x$ car $x - x = 0n$; si $x \sim y$, alors $x - y = kn$ pour k convenable et donc, $y - x = (-k)n$; enfin, si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $x - y = kn$ et $y - z = \ell n$ pour k et ℓ convenables, si bien que $x - z = (k + \ell)n$. On retrouve l'exemple précédent en prenant $n = 2$ (ou $n = -2$, d'ailleurs). Montrer que $x \sim y$ si et seulement si x et y ont le même reste dans la division par n.

b) Partitions

Remarquons qu'un ensemble de parties de E est une partie $\mathcal{F}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Les éléments de $\mathcal{F}$ sont donc des parties de E (et, si on veut, $\mathcal{F}$ est un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$...).

Exemple. Soit $E = \mathbb{Z}$, P l'ensemble des nombres pairs, I l'ensemble des nombres impairs. Alors $\mathcal{F} = \{P, I\}$ est un ensemble de parties de $\mathbb{Z}$. [À suivre.]

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}$, on note $\lfloor \cdot \rfloor$ la partie entière. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note $I_k = \{x \in \mathbb{R} :\ \lfloor x \rfloor = k\}$. L'ensemble $\{I_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une partition de $\mathbb{R}$. [À suivre.]

Exemple. Soit E un ensemble, $\mathcal{S}$ l'ensemble des singletons : pour chaque élément $x \in E$, on doit distinguer [2] et le singleton $\{x\} \subset E$ de l'élément x, et $\mathcal{S} = \big\{\{x\},\ x \in E\big\}$. Si E contient au

2. Comme on distingue une boîte qui contient un objet de l'objet lui-même.

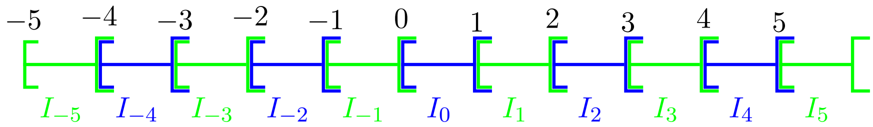

FIGURE 2 – Une partition des réels

moins deux éléments distincts x et y, $\{x, y\}$ est une partie de E qui n'appartient pas à $\mathcal{S}$. [À suivre.]

Lemme. *Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *tout élément de E appartient à un et un seul des éléments de $\mathcal{F}$:*

$$\forall x \in E,\ \exists!\, F \in \mathcal{F},\ x \in F.$$

(ii) *les éléments de $\mathcal{F}$ recouvrent E et sont deux à deux disjoints :*
- *d'une part : $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F = E$;*
- *d'autre part : $\forall F, F' \in \mathcal{F},\ F \cap F' = \emptyset$ ou $F = F'$.*

Démonstration. Supposons que la condition (i) soit satisfaite. L'existence d'une partie contenant n'importe quel éléments se traduit immédiatement par la condition : $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} = E$. Soient F et F' dans $\mathcal{F}$, supposons que $F \cap F' \neq \emptyset$. Soit alors $x \in F \cap F'$. Par unicité dans (i), comme F et F' sont deux éléments de $\mathcal{F}$ qui contiennent x, $F = F'$. D'où (ii).
Réciproquement, supposons que (ii) soit satisfaite. Soit $x \in E$. D'après la première condition, il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que $x \in F$. Si F et F' conviennent, alors F et F' ne sont pas disjoints donc $F = F'$: d'où l'unicité et (i) est vérifiée.

Définition. Soit E un ensemble. Une *partition* de E est un ensemble de parties de E dans laquelle l'ensemble vide ne figure pas et qui satisfait aux conditions du lemme précédent. Les éléments de la partition (ce sont des parties de E) sont appelés les *parts*.

Exemple. Les trois exemples ci-dessus sont des partitions. L'ensemble des paires (parties à deux éléments) d'un ensemble E ne forment pas une partition de cet ensemble – sauf si E a exactement deux éléments. [Vérifiez !]

c) Relations d'équivalences et partitions

Considérer des classes d'équivalence, c'est l'attitude qu'il est de bon ton de critiquer à la radio ou la télévision consistant à « mettre les individus dans des boîtes ». Esprits rebelles, n'y voyez pas une atteinte à votre indépendance d'esprit mais une volonté de mettre de l'ordre dans le monde mathématique.

Définition. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et soit $x \in E$. On appelle *classe d'équivalence de x* la partie de E formée des éléments qui sont en relation avec x. On la note parfois $C(x)$ ou $\overline{x}$; c'est donc :

$$C(x) = \{y \in E,\ y \sim x\}.$$

Lemme. *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Étant donnés x et x' dans E, on a : $x \sim x'$ si et seulement si $C(x) = C(x')$.*

Démonstration. Supposons que $x \sim x'$ et montrons $C(x) = C(x')$ par double inclusion. Soit $y \in C(x)$. On a donc : $y \sim x$. Vu que $x \sim x'$, on a par transitivité : $y \sim x'$, c'est-à-dire : $y \in C(x')$. Inversement, si $y \in C(x')$, on a $y \sim x'$. Par symétrie, la condition $x \sim x'$ donne : $x' \sim x$. Par transitivité, il vient : $y \sim x$, c'est-à-dire : $y \in C(x)$.
Réciproquement, si $C(x) = C(x')$, alors par réflexivité, on a : $x \in C(x) = C(x')$, d'où : $x \sim x'$.

Proposition. *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Alors, les classes d'équivalence de $\sim$ forment une partition de E.*

Démonstration. Soit x un élément de E : comme $\sim$ est réflexive, x appartient à sa classe d'équivalence, donc la réunion des classes d'équivalence est E entier.
Il reste à montrer que deux classes d'équivalence F et G non disjointes sont égales. Par définition, F est la classe d'un élément x et G celle d'un élément z. Or, elles ont un élément commun, disons y. On a donc : $y \sim x$ et $y \sim z$ donc, par symétrie et transitivité : $x \sim z$. D'après le lemme, il vient : $F = C(x) = C(z) = G$.

Remarque. Si $\mathcal{P}$ est une partition de E, on définit une relation $\sim$ par : $x \sim y$ si la part de $\mathcal{P}$ qui contient x contient aussi y. On vérifie alors que $\sim$ est une relation d'équivalence et que les parts de $\mathcal{P}$ sont les classes d'équivalence de $\sim$.
Avec le lemme, on voit que se donner une relation d'équivalence, cela revient au même que se donner une partition.

d) Définition de l'ensemble quotient

Définition. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. On appelle *ensemble quotient* de E par $\sim$ et on note $E/\!\sim$ l'ensemble dont les éléments sont les classes d'équivalence de $\sim$.
L'application qui à x de E associe sa classe $C(x)$ est appelée *projection canonique*[3] :

$$\pi \quad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E/\!\sim \\ x & \longmapsto & C(x), \end{array}$$

Cette application est *surjective* car toute classe d'équivalence est la classe d'équivalence, c'est-à-dire l'image par π, de n'importe lequel de ses éléments. Pour $\mathbf{x} \in E/\!\sim$, tout élément $x \in E$ tel que $\pi(x) = \mathbf{x}$ est appelé *représentant* de $\mathbf{x}$.

Exemple. Lorsque $\sim$ est l'égalité, les classes d'équivalence sont les singletons : alors, π est la bijection qui envoie (identifie) un élément x sur (et) le singleton $\{x\}$.
Par exemple, si $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $(E/\!\sim) = \big\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\big\}$: on n'a pas fait grand-chose...

Exemple. Soit $E = \mathbb{Z}$ et $\sim$ la relation : $x \sim y$ si $x - y$ est pair. Les classes d'équivalence sont au nombre de deux. En effet, d'une part, 0 et 1 ne sont pas en relation ; d'autre part, tout nombre est en relation soit avec 0, soit avec 1. Avec les notations introduite ci-dessus, les classes d'équivalence sont donc : $C(0) = P$ et $C(1) = I$. [À suivre.]

Exemple. Prenons à nouveau $E = \mathbb{Z}$ et fixons un entier non nul n. On dit que $x \sim y$ si $x - y$ est divisible par n ou, ce qui revient au même (vérifier !), si x et y ont le même reste dans la division euclidienne par n. Les classes d'équivalence sont indexées par les restes possibles, c'est-à-dire l'ensemble $\{0, 1, \dots, n-1\}$. On note normalement $\mathbb{Z}/n\mathbb{N}$ l'ensemble quotient. [À suivre.]

Exemple. Prenons comme au-dessus $E = \mathbb{R}$ et $x \sim y$ si $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$. Alors, $E/\!\sim$ est l'ensemble des intervalles $I_k = [k, k+1[$ $(k \in \mathbb{Z})$. On voit que l'application $(E/\!\sim) \to \mathbb{Z}$, $I_k \mapsto k$ est une bijection.
En mots : si on identifie les réels lorsqu'ils ont la même partie entière, on obtient un ensemble qui s'identifie naturellement à l'ensemble des entiers...

3. Rappelons que *canonique* ou *naturelle* signifie : définie indépendante de tout choix.

Exemple. Considérons le plan (vectoriel) $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté. Soit E l'ensemble des couples (u, v) de vecteurs non nuls. Considérons relation définie par : $(u, v) \sim (u', v')$ s'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^{+*}$ et ρ une isométrie directe du plan tels que $u' = \lambda\rho(u)$ et $v' = \mu\rho(v)$.
On montre sans trop de peine que $\sim$ est une relation d'équivalence – elle formalise la notion de *superposabilité* pour les couples de demi-droites. L'ensemble correspondant $\mathcal{A} = E/\sim$ est, par définition, l'ensemble des *angles*.

e) Manipulation pratique du quotient

Pour manipuler un ensemble quotient, la démarche est la suivante :

(i) on a un élément $\mathbf{x}$ du quotient $E/\sim$;
(ii) on *choisit* un élément x de E qui a pour classe d'équivalence $C(x) = \mathbf{x}$;
(iii) on manipule x ;
(iv) on vérifie que le résultat de la manipulation est indépendant du choix de x ; autrement dit, on montre que si $x' \sim x$, le résultat de la manipulation de iii avec x' est le même qu'avec x.

Exemple. Fixons un entier n non nul. On veut définir la somme et le produit de deux éléments $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On choisit donc $x \in \mathbf{x}$ et $y \in \mathbf{y}$. On voudrait définir $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ comme la classe de $x + y$ et $\mathbf{xy}$ comme la classe de xy. Mais cela dépend-il de notre choix ? Soit donc x' un autre élément de $\mathbf{x}$ et y' un autre élément de $\mathbf{y}$. On a donc : $x - x' = kn$ et $y - y' = \ell n$ pour k, ℓ entiers convenables. D'où :

$$(x + y) - (x' + y') = (k + \ell)n \quad \text{et} \quad xy - x'y' = (x' + kn)(y' + \ell n) - x'y' = (ky' + \ell x')n :$$

ce sont deux multiples de n, si bien que les classes de $x + y$ et $x' + y'$ d'une part, de xy et $x'y'$ d'autre part, sont égales. On définit de la sorte un *anneau* très utile – si ! – dans lequel on calcule comme $\mathbb{Z}$ avec une règle supplémentaire : $n = 0$.
Pour $n = 2$, la construction précédente revient à dire :

pair	+	pair	=	pair,		pair	×	pair	=	pair,
pair	+	impair	=	impair,		pair	×	impair	=	pair,
impair	+	impair	=	pair,		impair	×	impair	=	impair.

Voici la façon habituelle de définir une application dont l'ensemble de départ est un quotient.

Lemme. *Soit $f : E \to F$ une application et $\sim$ une relation d'équivalence sur E. On suppose que si $x \sim x'$, alors $f(x) = f(x')$. Alors il existe une unique application $\mathbf{f} : (E/\sim) \to F$ telle que $f = \mathbf{f} \circ \pi$.*

Démonstration. Sous réserve d'existence, l'unicité est facile. Pour $\mathbf{x}$ dans $E/\sim$, choisissons x dans $\mathbf{x}$. Comme on a : $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\pi(x)) = f(x)$, on voit que l'image de $\mathbf{x}$ par $\mathbf{f}$ est parfaitement déterminée par f.
Prouvons l'existence de $\mathbf{f}$. Soit $\mathbf{x} \in E/\sim$. On veut définir $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ comme l'image $f(x)$. Pour cela, il faut vérifier que $f(x)$ ne dépend pas de notre choix de x. Mais, pour x' un autre élément de $\mathbf{x}$, on a : $x \sim x'$, donc par hypothèse : $f(x) = f(x')$. On peut donc définir sans ambiguïté : $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = f(x)$.
Vérifions que $f = \mathbf{f} \circ \pi$. Pour $x \in E$, notons $\mathbf{x} = \pi(x)$ la classe d'équivalence de x, de sorte que x est un représentant de $\mathbf{x}$ et que, par définition de $\mathbf{f}$, on a : $f(x) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\pi(x))$.

3° Construction des nombres relatifs, rationnels, réels, complexes

Supposons connus les nombres entiers naturels.[4] Grâce à la notion de quotient, on va esquisser la construction des ensembles de nombres suivants :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

4. De la sorte, on saute par-dessus la plus grande difficulté...

a) Relatifs

Préoccupation qui justifie l'introduction des relatifs : les équations de la forme $x+a = b$ ($a, b \in \mathbb{N}$ donnés, x inconnue) n'ont pas toujours de solution.

On perçoit peut-être spontanément un entier relatif comme la juxtaposition d'un signe + ou − et d'un entier naturel. La définition des opérations (addition, produit) devient alors un peu artificielle, distinguant si les nombres ont le même signe ou pas, etc. De plus, elle ne s'étend pas à d'autres situations où on a une opération pour laquelle on doit produire des opposés/inverses.

Esquisse de construction : sur l'ensemble $\mathbb{N}^2$, on considère la relation : $(a, b) \sim (a', b')$ si $a + b' = a' + b$ (cela donne une condition portant sur les éléments de $\mathbb{N}$ pour exprimer que $b-a = b'-a'$). C'est une relation d'équivalence (vérifier !) ; le quotient est, par définition, $\mathbb{Z}$. La somme est définie à partir de $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$; l'opposé de la classe de (a, b) est la classe de (b, a) ; la multiplication, en ces termes, provient de l'opération : $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$ (correspondant à l'identité : $(b - a)(d - c) = ac + bd - (ad + bc)$).

b) Rationnels

Préoccupation qui justifie l'introduction des rationnels : les équations de la forme $ax = b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$ donnés, x inconnue) n'ont pas toujours de solution.

La construction des rationnels à partir des relatifs est identique à celle de $\mathbb{K}(X)$ à partir de $\mathbb{K}[X]$: relire ce qui précède en remplaçant $\mathbb{K}[X]$ par $\mathbb{Z}$!

c) Réels

Préoccupation qui justifie l'introduction des réels : certains rationnels, bien que positifs, n'ont pas de racine carrée ou cubique ou... pire, certaines suites qui « devraient converger » ne convergent pas vers un rationnels – par exemple, la suite $x_0 = 2$, $x_{n+1} = (x_n + 2/x_n)/2$, décroissante minorée, convergerait vers un nombre dont le carré vaut 2, qui ne peut pas être rationnel.

Esquisse de construction : on considère le gigantesque ensemble $\mathcal{C}$ des suites à valeurs rationnelles qui satisfont au critère de Cauchy. Rappelons qu'une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si pour tout *rationnel* $\varepsilon > 0$, il existe un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $p, q \geq n_0$, on a : $|r_p - r_q| \leq \varepsilon$.

On définit sur $\mathcal{C}$ une relation $\sim$ en disant que $(r_n) \sim (s_n)$ si la suite $(r_n - s_n)$ converge vers 0, c'est-à-dire si pour tout *rationnel* $\varepsilon > 0$, il existe un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, on a : $|r_p - s_n| \leq \varepsilon$.

On peut alors *définir* $\mathbb{R}$ comme l'ensemble quotient $\mathcal{C}/\sim$. Il faut définir les opérations (pas trop difficile) et démontrer le théorème de la borne inférieure (plus difficile).

d) Complexes

Préoccupation qui justifie l'introduction des complexes : les équations polynomiales, même de degré 2, n'ont pas toujours de solution.

Esquisse de construction : sur l'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$, on définit la relation : $P \sim Q$ si la différence $P - Q$ est divisible par $X^2 + 1$. Le quotient est le corps des complexes. On en fait naturellement un anneau (ici, on pourrait remplacer $X^2 + 1$ par n'importe quel polynôme, c'est la même chose que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$), et même un corps (cela résulte du fait que $X^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$). Cette construction est une version abstraite – la bonne, donc... – de celle que nous avons vue ensemble en octobre.

Rappelons la grosse surprise de la construction : tout polynôme complexe se factorise en produit de facteurs de degré 1 ; en termes plus chics, $\mathbb{C}$ est algébriquement clos – c'est le théorème de D'Alembert-Gauss.