Université Claude Bernard Lyon 1
L1 de Mathématiques : Math. II Algèbre (cursus PMI)
Année 2014–2015

On fixe pour tout le chapitre un corps $\mathbb{K}$. On va associer à toute matrice carrée, et même à tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, un scalaire appelé *déterminant*, ce qui va donner :

- un critère numérique pour l'inversibilité d'une matrice ou d'un endomorphisme,
- des formules (inutiles en pratique) pour résoudre les systèmes linéaires,
- un cadre pour parler de l'orientation d'un espace vectoriel réel,
- un outil pour mesurer les aires et les volumes,

et, plus tard,

- un invariant plus fin d'un endomorphisme appelé *polynôme caractéristique*, qui contrôle dans une large mesure le comportement de l'endomorphisme,
- un outil pour les changements de variables dans les intégrales multiples,
- etc.

Notation. Pour n entier naturel non nul, on désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, par $\mathbf{I}_n$ la matrice identité de taille $n \times n$.
On utilisera librement les matrices $T_{ij}(\lambda)$, $D_i(\alpha)$, P_{ij} introduites à la fin du chapitre sur les matrices, ainsi que l'effet de la multiplication de ces matrices en termes d'opérations sur les rangées.

I Construction

1° Mauvaise définition

Notation (Matrices extraites)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$. On note alors A_{ij} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A : si $A = (a_{ij})$, on a :

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K}).$$

Définition. On définit une famille d'applications $\det_n : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ par récurrence sur l'entier naturel n. Pour $n = 1$, on pose :

$$\forall (a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K}), \quad \det_1\big((a)\big) = a.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons avoir défini $\det : \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. On pose alors, pour A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{1j} \det_{n-1} A_{1j}.$$

Remarques. (i) Lorsque n est fixé, on notera désormais $\det$ au lieu de $\det_n$.
(ii) C'est une mauvaise définition car elle semble tout à fait artificielle et n'a aucune symétrie : pourquoi de telles choses auraient-elles la moindre propriété utile ?

2° Premiers exemples

Exemple. Pour $n = 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}),$$

on a $A_{11} = (d)$ et $A_{12} = (c)$, si bien que

$$\det A = ad - bc.$$

Exemple. Pour $n = 3$ et $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on a :

$$\det A = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le déterminant d'une matrice 3×3 est donné par la *règle de Sarrus* :

$$\det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{array} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} \end{array}$$

Lemme. *Soit n un entier non nul. Supposons que $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit triangulaire inférieure, c'est-à-dire que $a_{ij} = 0$ si $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Visuellement :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Alors le déterminant de A est le produit des coefficients diagonaux :

$$\det A = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Démonstration. On le prouve par récurrence sur n. Pour $n = 1$, c'est évident. Soit $n \geqslant 2$, supposons que ce soit vrai pour les matrices de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Alors pour A comme ci-dessus, on a par définition :

$$\det A = a_{11} \det A_{11} + \sum_{j \geqslant 2} (-1)^{j-1} \times 0 \times \det A_{1j} = a_{11} \det A_{11},$$

ce qui permet de conclure la récurrence. En particulier, on a :

$$\det \mathbf{I}_n = 1.$$

Voici un cas d'annulation bien utile.

Lemme. *Supposons qu'une ligne de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ soit nulle : alors* $\det(A) = 0$.

Démonstration. On le prouve par récurrence (finie) sur l'indice i de la ligne nulle. Si $i = 1$, c'est clair par la définition : tous les coefficients a_{1j} étant nuls, la somme $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}a_{1j}\det(A_{1j})$ est nulle aussi. Soit $i \geqslant 2$, supposons que le déterminant de toute matrice dont la $(i-1)$-ème ligne est nulle est nul et soit A une matrice dont la i-ème ligne est nulle.
Pour j entre 1 et n, la $(i-1)$-ème ligne de chaque matrice extraite A_{1j} est formée de coefficients de la i-ème ligne de A donc elle est nulle. Par l'hypothèse de récurrence, on a donc : $\det(A_{1j}) = 0$. Par définition, on en tire que $\det(A) = 0$.

Exemple. Le déterminant d'une matrice de transvection [1] $T_{ij}(\lambda)$ vaut 1.
On le montre par récurrence sur n. Pour $n = 1$, il n'y a pas de transvection. Pour $n = 2$, c'est clair : $\det\left(\begin{smallmatrix}1 & \lambda\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = 1 = \det\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{smallmatrix}\right)$.
Soit $n \geqslant 3$ et supposons que la propriété soit vraie au format $n-1$. Supposons dans un premier temps que l'on ait : $i \geqslant 2$. Alors, la première ligne de $T_{ij}(\lambda)$ est $(1\ 0\ \cdots\ 0)$. Le seul terme non nul dans la définition est le premier et la matrice extraite correspondante, A_{11}, est l'identité $\mathbf{I}_{n-1}$ (si $j = 1$) ou la transvection $T_{i-1,j-1}(\lambda)$ (si $j \geqslant 2$). Par hypothèse de récurrence, on a donc : $\det(A) = \det(A_{11}) = 1$.
Si $i = 1$, on a : $\det(A) = 1\det\mathbf{I}_{n-1} + (-1)^{j-1}\lambda\det(A_{1j})$. Mais observons la matrice A : comme $j \neq i$, le seul coefficient non nul de la ligne j est un 1 placé dans la colonne j. Par suite, dans la matrice extraite A_{1j}, la ligne d'indice $j-1$ est nulle. Par le lemme précédent, on a donc : $\det(A_{1j}) = 0$ et donc : $\det(A) = 1$.

3° Bonne caractérisation

a) L'énoncé

Théorème. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application* det *est l'unique application $\Delta : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ telle que :*
(a) *pour toutes matrices A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a : $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$;*
(b) *pour tous scalaires $d_1, \ldots, d_n$ dans $\mathbb{K}$, on a :* $\det\begin{pmatrix} d_1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & d_n\end{pmatrix} = d_1 \cdots d_n$.

Sens : D'une part, on a :

$$\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B),} \tag{μ}$$

d'autre part le déterminant est la seule application à satisfaire à ces contraintes. La première partie est la plus difficile à démontrer, on l'admettra ici. On va prouver l'unicité plus loin.

b) Conséquences de la multiplicativité (μ).

Dans ce paragraphe, on fixe une application $\Delta : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui satisfait à (a) et (b).

Lemme. *Soit P une matrice inversible : alors, $\Delta(P) \neq 0$.*
Soit de plus A une matrice quelconque : alors $\Delta(PAP^{-1}) = \Delta(A)$.

Attention ! En général, PAP^{-1} n'est pas égale à A.
Démonstration. Pour la première assertion, on écrit : $\Delta(P)\Delta(P^{-1}) = \Delta(PP^{-1}) = \Delta(\mathbf{I}_n) = 1$. Pour la seconde, on utilise la commutativité du produit des scalaires : $\Delta(PAP^{-1}) = \Delta(P)\Delta(A)\Delta(P^{-1}) = \Delta(P)\Delta(P^{-1})\Delta(A) = \Delta(A)$.

Lemme. *Soit $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors : $\Delta\big(T_{ij}(\lambda)\big) = 1$.*

1. Pour i et j distincts entre 1 et n et λ dans $\mathbb{K}$, on note $T_{ij}(\lambda) = \mathbf{I}_n + \lambda E_{ij}$ où E_{ij} est la matrice dont le seul coefficient non nul vaut 1 et est en position (i,j).

Démonstration. Un calcul direct donne[2] : $T_{ij}(\lambda)^2 = T_{ij}(2\lambda)$. On suppose que 2 est différent de 0 dans $\mathbb{K}$ (c'est le cas dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$...). Un nouveau calcul donne[3] : $D_j(1/2)T_{ij}(\lambda)D_j(2) = T_{ij}(2\lambda)$. D'après le lemme précédent, on a donc, en posant $d = \det T_{ij}(\lambda)$: d'une part, $d \neq 0$ car $T_{ij}(\lambda)$ est inversible et d'autre part : $d^2 = \det T_{ij}(2\lambda) = d$. Par suite, $d = 1$.

On en déduit l'unicité dans le théorème. Pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, des opérations sur les rangées permettent de montrer qu'il existe des transvections $T_1, \ldots, T_s, T'_1, \ldots, T'_{s'}$ et une matrice diagonale D telle que : $A = T_1 \cdots T_s D T'_1 \cdots T'_{s'}$. Par multiplicativité (condition (a)), on a donc d'après le lemme précédent :

$$\Delta(A) = \Delta(T_1) \cdots \Delta(T_s)\Delta(D)\Delta(T'_1) \cdots \Delta(T'_{s'}) = \Delta(D).$$

Mais $\Delta(D)$ est prescrit par la condition (b) du théorème, ce qui prouve l'unicité[4].

II Propriétés du déterminant et calcul

1° Opérations sur les rangées

Proposition. *Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A...*

(i) *ne change pas si on ajoute à une rangée un multiple d'une autre rangée (ou une combinaison linéaire des autres rangées) ;*

(ii) *est multiplié par α si on multiplie une rangée par un scalaire $\alpha \neq 0$;*

(iii) *est multiplié par -1 si on permute deux rangées.*

Démonstration. On fait la démonstration seulement pour les lignes. Pour les colonnes, il suffit de remplacer l'ordre des matrices dans les produits et quelques indices.
(i) Soit A' la matrice obtenue de A en remplaçant la i-ème ligne de A, disons L_i, par $L_i + \lambda L_j$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $j \neq i$. On a alors : $A' = T_{ij}(\lambda)A$. Par multiplicativité, et vu que les transvection ont pour déterminant 1, il vient : $\det A' = \det A$. En appliquant pluieurs fois ce résultat, on peut ajouter à la ligne une combinaison linéaire quelconque des autres lignes.
(ii) Remplacer la ligne L_i par αL_i, c'est remplacer A par $A' = D_i(\alpha)L_i$. Par suite : $\det A' = \det D_i(\lambda) \det A = \alpha \det A$.
(iii) Permuter deux lignes de A, c'est remplacer A par $A' = P_{ij}A$. Par suite[5] : $\det A' = \det P_{ij} \det A = -\det A$.

Remarque. Démontrer cette proposition à partir du théorème est une hypocrisie : en effet, la preuve du théorème consiste à prouver cette proposition et à en déduire la multiplicativité du déterminant.

2. Par exemple, pour $n = 2$, cela revient à vérifier que l'on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Par exemple, pour $n = 2$, cela revient à vérifier que l'on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Si Δ_1 et Δ_2 satisfont toutes deux à (a) et (b), alors on a : $\Delta_1(A) = \Delta_1(D) = d_1 \cdots d_n = \Delta_2(D) = \Delta_2(A)$.
5. Rappelons que l'on a : $P_{ij} = D_i(-1)T_{ij}(-1)T_{ji}(1)T_{ij}(-1)$, de sorte que $\det P_{ij} = -1$ par multiplicativité.

2° **Déterminant et transposition**

Définition. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. La *transposée* d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice notée ${}^tA = (a'_{ji}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie ainsi : pour $(j,i) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,m\}$, on a : $a'_{ji} = a_{ij}$.

Les propriétés suivantes se démontrent facilement.

Lemme. *La transposition est une application linéaire $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Lorsque $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.*

L'intérêt de la transposition est de permuter lignes et colonnes ; mais pour le déterminant, rien ne change.

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors : $\det({}^tA) = \det(A)$.*

Démonstration. Soit $\Delta : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto \det({}^tA)$. On a, pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\Delta(AB) = \det\big({}^t(AB)\big) = \det\big({}^tB\,{}^tA\big) = \det\big({}^tB\big)\det\big({}^tA\big) = \Delta(B)\Delta(A) = \Delta(A)\Delta(B).$$

De plus, comme une matrice diagonale est égale à sa transposée, son image par Δ est son déterminant, c'est-à-dire le produit des coefficients diagonaux. Autrement dit, Δ satisfait aux conditions (a) et (b) du théorème et il vient : $\Delta = \det$.

3° **Développement selon une rangée**

On va utiliser la matrice « damier » que voici :

$$\big((-1)^{i+j}\big)_{i,j} = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots & \\ - & + & - & + & \cdots & \\ + & - & + & - & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & + & - \\ & & & \cdots & - & + \end{pmatrix}.$$

Proposition. *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :*

(i) *(« développement selon une ligne ») pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on a :*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij};$$

(ii) *(« développement selon une colonne ») pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, on a :*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Démonstration (ou presque). (i) Le cas $i = 1$ n'est qu'une redite de la définition. Pour un indice i quelconque, on effectue les opérations suivantes : permuter les lignes 1 et i ; appliquer la définition ; permuter dans chaque matrice A_{1j} les lignes 1 et $i - 1$. En faisant attention aux signes, on obtient la formule souhaitée.
(ii) Cela résulte simplement de la partie (i) et de l'invariance du déterminant par transposition.

□

4° À propos du calcul pratique

L'idée consiste à se laisser guider par l'esprit de Gauss : par des opérations sur les rangées, on fait apparaître une rangée ne contenant presque que des zéros (si possible, 1 ou 2 au maximum) et on développe par rapport à cette rangée, puis on recommence avec les matrices obtenues (qui sont plus petites, le procédé finit par aboutir). Voir les innombrables exemples traités en TD.

5° Inversibilité

Rappelons que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles. C'est en fait un *groupe*[6] appelé *groupe linéaire*, d'où ses initiales.

Critère d'inversibilité

Proposition. *Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul :*

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0.$$

Démonstration. On a déjà vu un sens comme conséquence de la multiplicativité : si A est inversible, alors : $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = 1$.
On prouve la contraposée de cette assertion. Si A n'est pas inversible, alors son rang est strictement inférieur à n. Autrement dit, la famille des n colonnes de A, disons $(C_1, \ldots, C_n)$, est liée. Autrement dit, l'une des colonnes, disons C_{j_0}, est combinaison linéaire des autres : $C_{j_0} = \sum_{j \neq j_0} \lambda_j C_j$ (pour une famille de scalaires $(\lambda_j)_{j \neq j_0}$ convenable). Si on remplace la colonne C_{j_0} de A par $C_{j_0} - \sum_{j \neq j_0} \lambda_j C_j$, on ne change pas le déterminant mais on fait apparaître une colonne de zéros : par conséquent, le déterminant – qui est celui de A – est nul.

Comatrice

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On appelle *comatrice* de A la matrice $\mathrm{com}(A) = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice (i, j) est :

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Proposition. *On a, pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:*

$$A\,{}^t\mathrm{com}(A) = \det(A)\mathbf{I}_n = {}^t\mathrm{com}(A)A.$$

Démonstration. On ne montre que la première égalité, l'autre résulte de considérations analogues en remplaçant les lignes par les colonnes. On note $D = (d_{ij})$ la transposée de la comatrice de A : pour i et k entiers compris entre 1 et n, on a : $d_{ki} = c_{ik}$. D'autre part, on pose $B = AD$. Pour $(i, i') \in \{1, \ldots, n\}^2$, le coefficient d'indice (i, i') de B est :

$$b_{ii'} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} d_{ki'} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i'+k} a_{ik} \det A_{i'k}.$$

Fixons $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a :

$$b_{ii} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \det A$$

6. Sens : l'inverse d'une matrice inversible et le produit de deux matrices inversibles sont inversibles.

car on reconnaît le développement du déterminant de A selon la i-ème ligne !
À présent, soit $i \neq i'$. On a :

$$b_{ii'} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i'+j} a_{ij} \det A_{i'j}.$$

On reconnaît là le développement du déterminant selon la i'-ème de la matrice A' obtenue en remplaçant la i'-ème de A par la i-ème ligne de A :

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i'-1,1} & \cdots & \cdots & a_{i'-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i'+1,1} & \cdots & \cdots & a_{i'+1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Comme A' a deux lignes égales, celles d'indices i et i', on a bien :

$$b_{ii'} = \det A' = 0.$$

Expression de l'inverse

Corollaire. *Pour P inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :*

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\, {}^t\mathrm{com}(P).$$

Exemple. Pour $n = 1$, si a, b, c, d sont des scalaires tels que $ad - bc \neq 0$, on retrouve :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Mise en garde. *En pratique, cette formule n'est pas très commode et on ne l'utilise presque jamais. En effet, elle exige de calculer n^2 déterminants de taille $n - 1$ (pour la comatrice) et 1 déterminant de taille n, ce qui représente une très grande quantité de calculs.*
On préférera donc chercher l'inverse d'une matrice P en fixant $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ arbitraire dans $\mathbb{K}^n$ et en résolvant le système $PX = Y$ d'inconnue $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On obtiendra une expression des x_i de la forme :

$$\forall i = 1, \ldots n, \quad x_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} y_j,$$

et l'inverse de P est la matrice (q_{ij}). Pourquoi, au fait ?

III Applications

Pas traité en cours.