Espaces vectoriels

L1 cursus prépa.

3 mars 2015

I Généralités

0) Motivations : on voit de la linéarité partout

- théorie abstraite pour les (des) sytèmes linéaires :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- géométrie

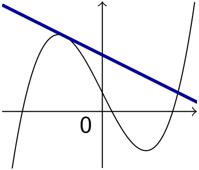
I Généralités

0) Motivations : on voit de la linéarité partout

- théorie abstraite pour les (des) sytèmes linéaires :

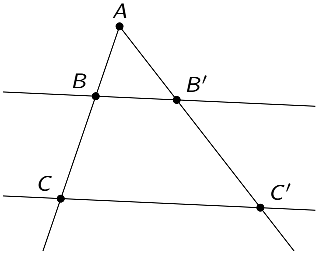
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- géométrie
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n, \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x), \quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t, \quad f'(x)\ldots$



- linéariser !

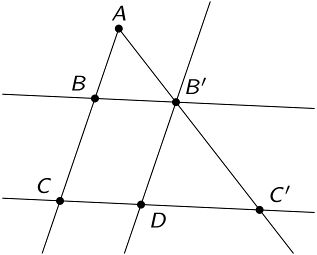
Thalès et la distributivité



Thalès :

$$\lambda = \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}}$$

Thalès et la distributivité

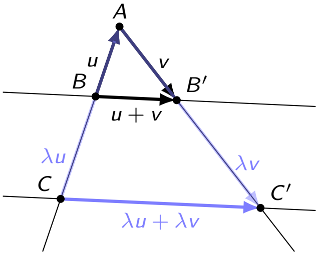


Deux applications de Thalès :

$$\lambda = \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{CD}}$$

$$\lambda\overrightarrow{BB'} = \lambda\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{BA} + \lambda\overrightarrow{AB'}$$

Thalès et la distributivité



Deux applications de Thalès :

$$\lambda = \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{CD}}$$

$$\lambda\overrightarrow{BB'} = \lambda\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{BA} + \lambda\overrightarrow{AB'}$$

$$\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v.$$

I Généralités

1) Rappel

On appelle *corps* un triplet $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ tel que :

(i) $\forall(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3,\ (\lambda + \mu) + \nu = \lambda + (\mu + \nu)$ ($+$ *associative*) ;

(ii) $\exists 0 \in \mathbb{K},\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda + 0 = \lambda = 0 + \lambda$ (*zéro*, unique) ;

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \exists \lambda' \in \mathbb{K},\ \lambda + \lambda' = 0 = \lambda' + \lambda$ (*opposé*, unique $-\lambda$) ;

(iv) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda + \mu = \mu + \lambda$ ($+$ *commutative*) ;

(v) $\forall(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3,\ (\lambda \cdot \mu) \cdot \nu = \lambda \cdot (\mu \cdot \nu)$ ($\cdot$ *associatif*) ;

(vi) $\exists 1 \in \mathbb{K},\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot 1 = \lambda = 1 \cdot \lambda$ (*unité*, unique) ;

(vii) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \exists \lambda' \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot \lambda' = 1 = \lambda' \cdot \lambda$ (*inverse*, unique, λ^{-1}) ;

(viii) $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda \cdot \mu = \mu \cdot \lambda$ ($\cdot$ *commutatif*) ;

(ix) $\forall(\lambda, \mu, \mu') \in \mathbb{K}^3,\ \begin{cases} \lambda \cdot (\mu + \mu') = \lambda \cdot \mu + \lambda \cdot \mu' \\ (\mu + \mu') \cdot \lambda = \mu \cdot \lambda + \mu' \cdot \lambda \end{cases}$

Exemples : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}(X)$, $\mathbb{C}(X)$...

Convention

Dans tout le chapitre, on choisit un corps quelconque $\mathbb{K}$ *appelé corps de base. Ses éléments sont appelés scalaires.*

2) Espace vectoriel

a) Définition : espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-*e.v.*)

C'est un ensemble E de vecteurs muni de deux opérations
$+ : E \times E \to E$ (somme de deux vecteurs) et
$\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ (produit d'un scalaire par un vecteur),
contenant un élément $\overrightarrow{0}$ (vecteur nul)

2) Espace vectoriel

a) Définition : espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-*e.v.*)

C'est un ensemble E de vecteurs muni de deux opérations
$+ : E \times E \to E$ (somme de deux vecteurs) et
$\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ (produit d'un scalaire par un vecteur),
contenant un élément $\overrightarrow{0}$ (vecteur nul)tels que

(i) $\forall (u, v, w) \in E^3,\ (u + v) + w = u + (v + w)$ (+ *associative*) ;

(ii) $\forall u \in E,\ u + \overrightarrow{0} = u = \overrightarrow{0} + u$ (*vecteur nul*, unique) ;

(iii) $\forall u \in E,\ \exists u' \in E,\ u + u' = 0 = u' + u$ (*opposé*, unique, $-u$) ;

(iv) $\forall (u, v) \in E^2,\ u + v = v + u$ (+ *commutative*) ;

2) Espace vectoriel

a) Définition : espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-*e.v.*)

C'est un ensemble E de vecteurs muni de deux opérations
$+ : E \times E \to E$ (somme de deux vecteurs) et
$\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ (produit d'un scalaire par un vecteur),
contenant un élément $\overrightarrow{0}$ (vecteur nul)tels que

(i) $\forall (u, v, w) \in E^3, \ (u + v) + w = u + (v + w)$ ($+$ *associative*) ;

(ii) $\forall u \in E, \ u + \overrightarrow{0} = u = \overrightarrow{0} + u$ (*vecteur nul*, unique) ;

(iii) $\forall u \in E, \ \exists u' \in E, \ u + u' = 0 = u' + u$ (*opposé*, unique, $-u$) ;

(iv) $\forall (u, v) \in E^2, \ u + v = v + u$ ($+$ *commutative*) ;

(v) $\forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2, \forall (v, v') \in E^3, \ \begin{cases} \lambda \cdot (v + v') = \lambda \cdot v + \lambda \cdot v' \\ (\lambda + \lambda') \cdot u = \lambda \cdot u + \lambda' \cdot u; \end{cases}$

(vi) $\forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2, \forall v \in E, \ \lambda \cdot (\lambda' \cdot v) = (\lambda \lambda') \cdot v$;

(vii) $\forall v \in E, \ 1 \cdot u = u$.

Un exemple de calcul

Proposition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, soient $u \in E$ un vecteur et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Alors :

$$\lambda u = \overrightarrow{0} \iff \left(\lambda = 0 \text{ ou } u = \overrightarrow{0}\right).$$

Un exemple de calcul

Proposition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, soient $u \in E$ un vecteur et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Alors :

$$\lambda u = \overrightarrow{0} \iff (\lambda = 0 \text{ ou } u = \overrightarrow{0}).$$

Démonstration

« $\Leftarrow$ » Si $\lambda = 0$ alors $0u + 0u = (0+0)u = 0u$ donc $0u = \overrightarrow{0}$.
Si $u = \overrightarrow{0}$ alors $\lambda\overrightarrow{0} + \lambda\overrightarrow{0} = \lambda(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = \lambda\overrightarrow{0}$ donc $\lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

« $\Rightarrow$ » Suppose $\lambda u = \overrightarrow{0}$. Si $\lambda = 0$, rien à dire. Sinon :

$$u = (\lambda^{-1}\lambda)u = \lambda^{-1}(\lambda u) = \lambda^{-1}\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}.$$

b) Exemples de $\mathbb{K}$-e.v.

0. $E = \{\overrightarrow{0}\}$ est un e.v. en posant : $\begin{cases} \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} := \overrightarrow{0} \\ \lambda \cdot \overrightarrow{0} := \overrightarrow{0} \qquad (\lambda \in \mathbb{K}). \end{cases}$

b) Exemples de $\mathbb{K}$-e.v.

0. $E = \{\overrightarrow{0}\}$ est un e.v. en posant : $\begin{cases} \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} := \overrightarrow{0} \\ \lambda \cdot \overrightarrow{0} := \overrightarrow{0} & (\lambda \in \mathbb{K}). \end{cases}$

1. $E = \mathbb{K}$: e.v. par définition de corps.
   $(+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K},\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K})$

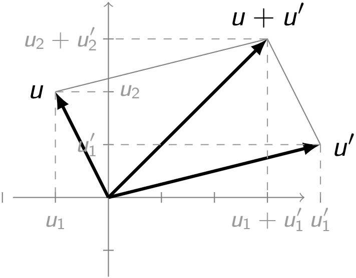
b) Exemples de $\mathbb{K}$-e.v.

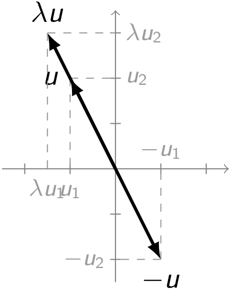
0. $E = \{\overrightarrow{0}\}$ est un e.v. en posant : $\begin{cases} \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} := \overrightarrow{0} \\ \lambda \cdot \overrightarrow{0} := \overrightarrow{0} \qquad (\lambda \in \mathbb{K}). \end{cases}$

1. $E = \mathbb{K}$: e.v. par définition de corps.

2. $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: si $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

   on pose : $u + v := \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$ et $\lambda u := \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix}$.

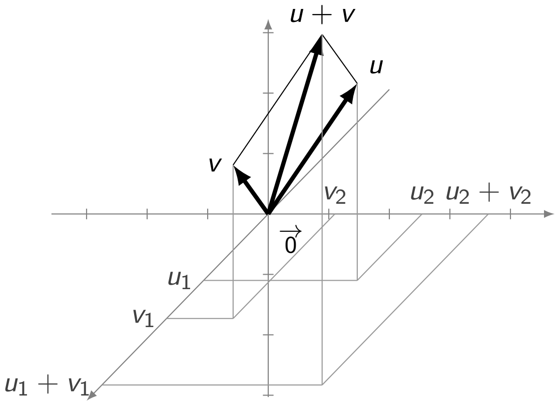




Exemples de $\mathbb{K}$-e.v. (suite)

3. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: si $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

   on pose : $u + v := \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}$ et $\lambda u := \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \end{pmatrix}$.



L'exemple fondamental de $\mathbb{K}$-e.v.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}, v = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$u + v = (u_i + v_i)_{1 \leq i \leq n} \quad \text{et} \quad \lambda u = (\lambda u_i)_{1 \leq i \leq n}.$$

L'exemple fondamental de $\mathbb{K}$-e.v.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}, v = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$u + v = (u_i + v_i)_{1 \leq i \leq n} \quad \text{et} \quad \lambda u = (\lambda u_i)_{1 \leq i \leq n}.$$

- $(u+v)+w = \big((u_i+v_i)+w_i\big)_i = \big(u_i+(v_i+w_i)\big)_i = u+(v+w)$;
- vecteur nul : $\overrightarrow{0} = (0)_i = (0, \ldots, 0)$;
- opposé : soit $-u = (-u_i)_i$, on a : $u + (-u) = (u_i - u_i)_i = \overrightarrow{0}$;
- $u + v = (u_i + v_i)_i = (v_i + u_i)_i = v + u$;

L'exemple fondamental de $\mathbb{K}$-e.v.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = (u_i)_{1 \le i \le n}, v = (v_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$u + v = (u_i + v_i)_{1 \le i \le n} \quad \text{et} \quad \lambda u = (\lambda u_i)_{1 \le i \le n}.$$

- $(u+v)+w = \big((u_i+v_i)+w_i\big)_i = \big(u_i+(v_i+w_i)\big)_i = u+(v+w)$;
- vecteur nul : $\overrightarrow{0} = (0)_i = (0, \ldots, 0)$;
- opposé : soit $-u = (-u_i)_i$, on a : $u + (-u) = (u_i - u_i)_i = \overrightarrow{0}$;
- $u + v = (u_i + v_i)_i = (v_i + u_i)_i = v + u$;
- $\lambda(v+v') = \lambda(v_i+v_i') = \big(\lambda(v_i+v_i')\big)_i = \big(\lambda v_i+\lambda v_i'\big) = \lambda v+\lambda v'$;
- $(\lambda + \lambda')v = \big((\lambda + \lambda')v_i\big)_i = (\lambda v_i + \lambda' v_i)_i = \lambda v + \lambda' v$;
- $\lambda(\lambda' v) = \lambda(\lambda' v_i)_i = (\lambda\lambda' v_i)_i = (\lambda\lambda')v$;
- $1v = v$.

C'est bien un e.v. sur $\mathbb{R}$.

L'exemple fondamental de $\mathbb{K}$-e.v.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:
   pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}, v = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^2$, on pose :
   $$u + v = (u_i + v_i)_{1 \leq i \leq n} \quad \text{et} \quad \lambda u = (\lambda u_i)_{1 \leq i \leq n}.$$
   - $(u+v)+w = \big((u_i+v_i)+w_i\big)_i = \big(u_i+(v_i+w_i)\big)_i = u+(v+w)$;
   - vecteur nul : $\overrightarrow{0} = (0)_i = (0, \ldots, 0)$;
   - opposé : soit $-u = (-u_i)_i$, on a : $u + (-u) = (u_i - u_i)_i = \overrightarrow{0}$;
   - $u + v = (u_i + v_i)_i = (v_i + u_i)_i = v + u$;
   - $\lambda(v+v') = \lambda(v_i+v_i') = \big(\lambda(v_i+v_i')\big)_i = \big(\lambda v_i+\lambda v_i'\big) = \lambda v+\lambda v'$;
   - $(\lambda + \lambda')v = \big((\lambda + \lambda')v_i\big)_i = (\lambda v_i + \lambda' v_i)_i = \lambda v + \lambda' v$;
   - $\lambda(\lambda' v) = \lambda(\lambda' v_i)_i = (\lambda\lambda' v_i)_i = (\lambda\lambda')v$;
   - $1v = v$.

   C'est bien un e.v. sur $\mathbb{R}$.
5. Idem avec $\mathbb{K}$ quelconque au lieu de $\mathbb{R}$.

Plus d'exemples de $\mathbb{K}$-e.v.

6. $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z, w \in \mathbb{C}$, on sait calculer $z + w$ et λz (somme et produit de deux complexes) !
   Les axiomes sont satisfaits (exercice).

Plus d'exemples de $\mathbb{K}$-e.v.

6. $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z, w \in \mathbb{C}$, on sait calculer $z + w$ et λz (somme et produit de deux complexes) !
   Les axiomes sont satisfaits (exercice).

7. Polynômes : $E = \mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K}$ quelconque :
   pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, $Q = \sum_{\ell=0}^{e} b_\ell X^\ell \in \mathbb{K}[X]$,
   $$P + Q := \sum_{k=0}^{\max(d,e)} (a_k + b_k) X^k, \quad \lambda P := \sum_{k=0}^{d} \lambda a_k X^k$$
   (où $a_k = 0$ si $k > d$ et $b_\ell = 0$ si $\ell > e$).

Plus d'exemples de $\mathbb{K}$-e.v.

6. $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z, w \in \mathbb{C}$, on sait calculer $z + w$ et λz (somme et produit de deux complexes) !
   Les axiomes sont satisfaits (exercice).

7. Polynômes : $E = \mathbb{K}[X]$ sur $\mathbb{K}$ quelconque :
   pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, $Q = \sum_{\ell=0}^{e} b_\ell X^\ell \in \mathbb{K}[X]$,
   $$P + Q := \sum_{k=0}^{\max(d,e)} (a_k + b_k) X^k, \quad \lambda P := \sum_{k=0}^{d} \lambda a_k X^k$$
   (où $a_k = 0$ si $k > d$ et $b_\ell = 0$ si $\ell > e$).

8. Fractions rationnelles : $E = \mathbb{K}(X)$ sur $\mathbb{K}$ quelconque.

Encore plus d'exemples de $\mathbb{K}$-e.v.

8. Fonctions : pour J ensemble quelconque, on note

$$E = \mathbb{K}^J : \text{ l'ensemble des fonctions de } J \text{ dans } \mathbb{K}.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g : J \to \mathbb{K}$, on définit :

$$f+g : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \lambda f : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x). \end{array}$$

(Autrement dit : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout x.)

Encore plus d'exemples de $\mathbb{K}$-e.v.

8. Fonctions : pour J ensemble quelconque, on note

$$E = \mathbb{K}^J : \text{ l'ensemble des fonctions de } J \text{ dans } \mathbb{K}.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g : J \to \mathbb{K}$, on définit :

$$f + g : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \lambda f : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x). \end{array}$$

(Autrement dit : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout x.)

Cas particuliers déjà rencontrés :

- $J = \{1, \dots, n\}$: alors $\mathbb{K}^J = \mathbb{K}^n$;
- matrices 2×2 réelles : $\mathbb{R}^J$ avec $J = \{1, 2\} \times \{1, 2\}$;
- suites réelles : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ – ou complexes : $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$;
- fonctions d'un intervalle J dans $\mathbb{R}$.

3) Sous-espaces vectoriels

a) Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel (sous-e.v.) de E si :

1. F n'est pas vide ;
2. pour tout $(u, v) \in F^2$, $u + v \in F$;
3. pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $v \in F$, $\lambda v \in F$.

3) Sous-espaces vectoriels

a) Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel (sous-e.v.) de E si :

1. F n'est pas vide ;
2. pour tout $(u, v) \in F^2$, $u + v \in F$;
3. pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $v \in F$, $\lambda v \in F$.

Lemme

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et F un sous-espace vectoriel (sous-e.v.) de E.
Alors $\overrightarrow{0} \in F$.

b) Exemples

1. Pour tout espace vectoriel E :
    - $\left\{ \overrightarrow{0} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E ;
    - E est un sous-espace vectoriel E.

b) Exemples

1. Pour tout espace vectoriel E :
   - $\{\overrightarrow{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de E ;
   - E est un sous-espace vectoriel E.
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$: une droite D est-elle un sous-e.v. de E ?
   - Condition nécessaire : $\overrightarrow{0} \in D$.
   - Cette condition est suffisante (exo).
3. Parabole : $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x^2\right\}$ est-elle un sev ?

b) Exemples

1. Pour tout espace vectoriel E :
   - $\{\overrightarrow{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de E ;
   - E est un sous-espace vectoriel E.
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$: une droite D est-elle un sous-e.v. de E ?
   - Condition nécessaire : $\overrightarrow{0} \in D$.
   - Cette condition est suffisante (exo).
3. Parabole : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x^2\}$ est-elle un sev ? Non !
4. Réseau : $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ est-il un sev ?

b) Exemples

1. Pour tout espace vectoriel E :
   - $\{\overrightarrow{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de E ;
   - E est un sous-espace vectoriel E.
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$: une droite D est-elle un sous-e.v. de E ?
   - Condition nécessaire : $\overrightarrow{0} \in D$.
   - Cette condition est suffisante (exo).
3. Parabole : $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = x^2\right\}$ est-elle un sev ? Non !
4. Réseau : $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ est-il un sev ? Non !
5. Exercice : les sous-e.v. de $\mathbb{R}^2$ sont : $\{\overrightarrow{0}\}$, $\mathbb{R}^2$ et les droites contenant $\overrightarrow{0}$.

Exemples de sev (suite)

7. $E = \mathbb{R}[X]$, $n \in \mathbb{N}$, $F = \mathbb{R}_n[X] = \left\{P \in \mathbb{R}[X],\ \deg(P) \leq n\right\}$.

   C'est un sev : $\begin{cases} \deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q), \\ \deg(\lambda P) \leq \deg(P). \end{cases}$

Exemples de sev (suite)

7. $E = \mathbb{R}[X]$, $n \in \mathbb{N}$, $F = \mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \deg(P) \leq n\}$.

   C'est un sev : $\begin{cases} \deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q), \\ \deg(\lambda P) \leq \deg(P). \end{cases}$

8. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} :\ (u_n) \text{ converge}\}$: sev ?

Exemples de sev (suite)

7. $E = \mathbb{R}[X]$, $n \in \mathbb{N}$, $F = \mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \deg(P) \leq n\}$.
   C'est un sev : $\begin{cases} \deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q), \\ \deg(\lambda P) \leq \deg(P). \end{cases}$

8. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} :\ (u_n) \text{ converge}\}$: sev ?
   Oui : si (u_n) et (v_n) convergent et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les suites $(u_n + v_n)$ et (λu_n) convergent.

Exemples de sev (suite)

7. $E = \mathbb{R}[X]$, $n \in \mathbb{N}$, $F = \mathbb{R}_n[X] = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \deg(P) \leq n\}$.
   C'est un sev : $\begin{cases} \deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q), \\ \deg(\lambda P) \leq \deg(P). \end{cases}$

8. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $F = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} :\ (u_n) \text{ converge}\}$: sev ?
   Oui : si (u_n) et (v_n) convergent et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les suites $(u_n + v_n)$ et (λu_n) convergent.

9. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{\text{fctns continues}\}$, $G = \{\text{fctns dérivables}\}$.
10. $E = \mathbb{R}^{[0,1]}$, $H = \{\text{fonctions intégrables au sens de Riemann}\}$...

c) « Test du sous-espace »

Proposition

Soit F une partie de E. Les conditions sont équivalentes :

1. F est un sous-e.v. de E ;
2. F n'est pas vide et, pour tout $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$ et tout $(v, v') \in F^2$, on a : $\lambda v + \lambda' v' \in F$.

c) « Test du sous-espace »

Proposition

Soit F une partie de E. Les conditions sont équivalentes :

1. F est un sous-e.v. de E ;
2. F n'est pas vide et, pour tout $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$ et tout $(v, v') \in F^2$, on a : $\lambda v + \lambda' v' \in F$.

Démonstration

« 1⇒2 » : Supposons F sous-e.v. de E ; alors F n'est pas vide.

c) « Test du sous-espace »

Proposition

Soit F une partie de E. Les conditions sont équivalentes :

1. F est un sous-e.v. de E ;
2. F n'est pas vide et, pour tout $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$ et tout $(v, v') \in F^2$, on a : $\lambda v + \lambda' v' \in F$.

Démonstration

« 1⇒2 » : Supposons F sous-e.v. de E ; alors F n'est pas vide. Soient $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$ et $(v, v') \in F^2$. Alors λv et $\lambda' v'$ appartiennent à F ; puis $\lambda v + \lambda' v'$ appartient à F.

c) « Test du sous-espace »

Proposition

Soit F une partie de E. Les conditions sont équivalentes :

1. F est un sous-e.v. de E ;
2. F n'est pas vide et, pour tout $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$ et tout $(v, v') \in F^2$, on a : $\lambda v + \lambda' v' \in F$.

Démonstration

« 1⇒2 » : Supposons F sous-e.v. de E ; alors F n'est pas vide. Soient $(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2$ et $(v, v') \in F^2$. Alors λv et $\lambda' v'$ appartiennent à F ; puis $\lambda v + \lambda' v'$ appartient à F.

« 2⇒1 » : Supposons F satisfait à 1. Alors F non vide.
Soit $(v, v') \in F^2$, on a : $v + v' = 1v + 1v' \in F$.
Soit de plus $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $\lambda v = \lambda v + 0v \in F$.

4) Combinaisons linéaires et sous-espace engendré

a) Familles finies

Soit I un ensemble fini. Une famille de scalaires (indexée par I) est une application $\lambda : I \to \mathbb{K}$, $i \mapsto \lambda_i$. Notation typique : $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$.

4) Combinaisons linéaires et sous-espace engendré

a) Familles finies

Soit I un ensemble fini. Une famille de scalaires (indexée par I) est une application $\lambda : I \to \mathbb{K}$, $i \mapsto \lambda_i$. Notation typique : $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$.

Une famille de vecteurs (indexée par I) dans un e.v. E est une application $v : I \to E$, $i \mapsto v_i$. Notation typique : $(v_i)_{i\in I} \in E^I$.

Exemple : si $I = \{1, \dots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, une famille de vecteurs est une n-liste : $(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

4) Combinaisons linéaires et sous-espace engendré

a) Familles finies

Soit I un ensemble fini. Une famille de scalaires (indexée par I) est une application $\lambda : I \to \mathbb{K}$, $i \mapsto \lambda_i$. Notation typique : $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$.

Une famille de vecteurs (indexée par I) dans un e.v. E est une application $v : I \to E$, $i \mapsto v_i$. Notation typique : $(v_i)_{i\in I} \in E^I$.

Exemple : si $I = \{1, \dots, n\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, une famille de vecteurs est une n-liste : $(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

b) Combinaison linéaire

Soient I un ensemble fini, $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires, $(v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On forme la combinaison linéaire (c.l.) :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i v_i \in E \qquad \text{(somme finie).}$$

Ex. : si $I = \{1, \dots, n\}$, une c.l. est : $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$.

c) Sous-espace engendré

Définition

Soit $\mathbf{v} = (v_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs. L'ensemble des combinaisons linéaires de $(v_i)_{i \in I}$ est :

$$\mathrm{Vect}(\mathbf{v}) = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i v_i,\ (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \right\}.$$

c) Sous-espace engendré

Définition

Soit $\mathbf{v} = (v_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs. L'ensemble des combinaisons linéaires de $(v_i)_{i \in I}$ est :

$$\mathrm{Vect}(\mathbf{v}) = \Big\{ \sum_{i \in I} \lambda_i v_i,\ (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \Big\}.$$

Proposition

Soit $\mathbf{v} = (v_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors $\mathrm{Vect}(\mathbf{v})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration : exercice.

c) Sous-espace engendré

Définition

Soit $\mathbf{v} = (v_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs. L'ensemble des combinaisons linéaires de $(v_i)_{i \in I}$ est :

$$\mathrm{Vect}(\mathbf{v}) = \Big\{ \sum_{i \in I} \lambda_i v_i, \ (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \Big\}.$$

On appelle $\mathrm{Vect}(\mathbf{v})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\mathbf{v}$.

Proposition

Soit $\mathbf{v} = (v_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs de E. Alors $\mathrm{Vect}(\mathbf{v})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration : exercice.

1) Familles génératrices

2) Familles libres

3) Relations entre familles libres et génératrices

4) Bases