Université Claude Bernard Lyon 1
L1 de Mathématiques : Algèbre
Année 2015–2016

Nombres complexes et géométrie

Le point de vue de ce chapitre consiste à relier une géométrie plane supposée connue aux nombres complexes (re)découverts dans un chapitre précédent. On pourrait en quelque sorte inverser le point de vue et reconstruire complètement la géométrie plane à partir de considérations purement algébriques, mais ce n'est pas la démarche adoptée ici.

I Points et vecteurs

1° Coordonnées dans un plan affine euclidien

a) Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien. C'est d'abord un ensemble dont on appelle *points* les éléments, que l'on note A, B, etc. Il y a plus : quand on se donne un couple de points $(A, B) \in \mathscr{P}^2$, on forme un *vecteur* $\overrightarrow{AB}$. Pour quatre points A, B, C, D, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme, c'est-à-dire que les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu (figure 1).

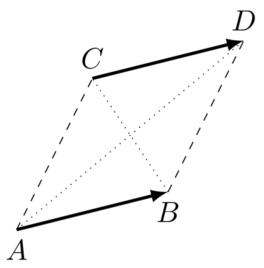

FIGURE 1 – Vecteurs égaux

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ ne dépend pas du point A, on le note $\overrightarrow{0}$ et on l'appelle *vecteur nul*. On a deux opérations sur les vecteurs : la *somme* et le *produit par un réel* (figure 2). Le vecteur nul est neutre pour l'addition et absorbant pour le produit par un réel.

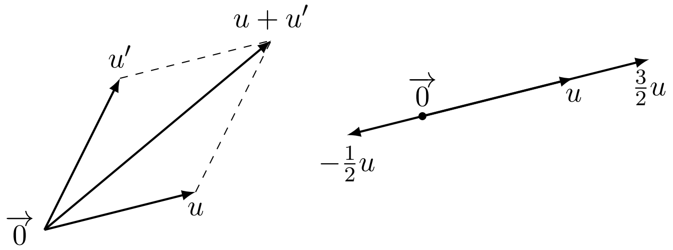

FIGURE 2 – Somme de deux vecteurs, produit d'un vecteur par un réel

S'agissant d'un plan *euclidien*, on a de plus une façon de mesurer les distances ou mieux, un *produit scalaire*. Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est un réel noté $\langle u, v \rangle$. Les propriétés suivantes [1] sont satisfaites pour des vecteurs u, u', v et v' et des réels λ, λ' quelconques :

(i) $\langle u, u \rangle \geqslant 0$;

(ii) $\langle u, u \rangle = 0$ si et seulement si $u = \overrightarrow{0}$;

1. Connues du lycée mais pas revues en amphi.

(iii) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;

(iv) $\langle \lambda u + \lambda' u', v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle + \lambda'\langle u', v\rangle$;

(v) $\langle u, \lambda v + \lambda' v'\rangle = \lambda\langle u, v\rangle + \lambda'\langle u, v'\rangle$ (cela résulte de (iii) et (iv).

Ce produit scalaire permet de définir la *norme* d'un vecteur u :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

et la *distance* AB entre deux points A et B :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.$$

b) Bases, repères et coordonnées

On fixe un *repère* $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2)$. Ici, O est un point de $\mathscr{P}$ et (e_1, e_2) est une *base*[2] de l'espace des vecteurs. Cela signifie que pour tout vecteur u, il existe un unique couple (x, y) tel que

$$u = xe_1 + ye_2.$$

Par conséquent, pour tout point M de $\mathscr{P}$, il existe un unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\overrightarrow{OM} = xe_1 + ye_2.$$

On dit que le couple (x, y), que je préfère noter $\binom{x}{y}$, est le couple des *coordonnées* de u ou de M. Il dépend du repère $\mathscr{R}$. Le lien entre coordonnées d'un vecteur et des points est le suivant : si A a pour coordonnées $\binom{x_A}{y_A}$, B a pour coordonnées $\binom{x_A}{y_A}$, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A}$. Cela provient du calcul :

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -(x_A e_1 + y_A e_2) + (x_B e_1 + y_B e_2) = (x_B - x_A)e_1 + (y_B - y_A)e_2.$$

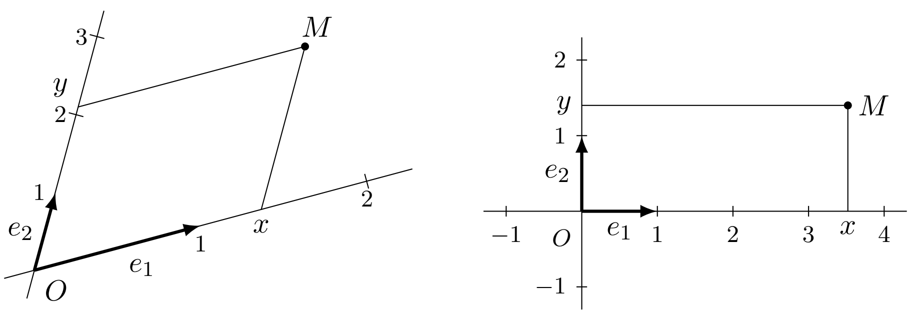

Figure 3 – Repère et repère orthonormé

c) Repères orthonormés

En fait, comme on a un produit scalaire sur les vecteurs, on peut montrer qu'il existe des repères *orthonormé*, c'est-à-dire des repères (O, e_1, e_2) tels que :

$$\langle e_1, e_2\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle e_1, e_1\rangle = 1 = \langle e_2, e_2\rangle.$$

On fixe désormais un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2)$ du plan.

Soient u et u' des vecteurs de coordonnées $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$. On calcule le produit scalaire :

$$\langle u, u'\rangle = \langle xe_1 + ye_2, x'e_1 + y'e_2\rangle = xx'\langle e_1, e_1\rangle + xy'\langle e_1, e_2\rangle + yx'\langle e_2, e_1\rangle + yy'\langle e_2, e_2\rangle = xx' + yy'.$$

2. La notion sera précisée dans le chapitre suivant et au S2.

2° Affixes

Rappelons une dernière fois que l'on a choisi un repère orthonormé $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2)$ du plan affine euclidien $\mathscr{P}$. Étant donné un point M de $\mathscr{P}$ (resp. un vecteur u) ayant pour coordonnées $\binom{x}{y}$, on appelle *affixe* de M (resp. de u) le nombre complexe

$$z = x + yi.$$

Lemme. (i) *Soient u et u' deux vecteurs ayant pour affixes respectifs*[3] *z et z'. Alors :*

$$\langle u, u' \rangle = \mathrm{Re}\big(z\overline{z'}\big).$$

(ii) *Soient A et B des points d'affixes respectifs z_A et z_B. Alors, la distance entre ces deux points est :*

$$AB = |z_A - z_B|.$$

Démonstration. (i) Notons $z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{Re}\big(z\overline{z'}\big) = \mathrm{Re}\big((x+yi)\overline{x' - y'i}\big) = \mathrm{Re}\big(xx' + yy' + (yx' - xy')i\big) = xx' + yy'.$$

(ii) En prenant $u = u' = \overrightarrow{AB}$, vecteur qui a pour affixe $z_B - z_A$, on a :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\mathrm{Re}\big((z_B - z_A)\overline{z_B - z_A}\big)} = \sqrt{\left|z_B - z_A\right|^2} = |z_B - z_A|.$$

□

3° Angles

La définition n'est motivée que si on sait ou si on croit qu'il existe une notion d'angles, que l'on peut ajouter ou retrancher des angles, etc.

Définition. Soient u et u' deux vecteurs non nuls d'affixes respectifs z et z'. On appelle *mesure de l'angle défini par* (u, u') et on note $\big(\widehat{u, u'}\big)$, ou plus simplement (u, u'), tout argument du nombre complexe non nul $\frac{z'}{z}$.

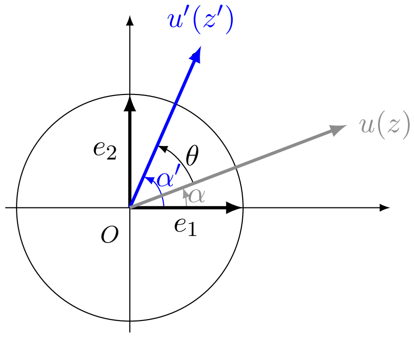

Figure 4 – Définition des angles et argument

Esquisse de justification (figure 4). Soit α un argument de $z = \frac{z}{1}$. C'est, par définition, une mesure de l'angle (e_1, u) ; *idem* pour α', un argument de z', qui est aussi une mesure de (e_1, u'). Mais alors, si on « croit » à l'addition des angles, on doit avoir :

$$(u, u') \equiv -(e_1, u) + (e_1, u') \equiv -\arg\frac{z}{1} + \arg\frac{z'}{1} \equiv \arg\frac{z'}{z} \ [2\pi].$$

C'est donc bien naturel. Lorsque $u = \overrightarrow{AB}$ et $v = \overrightarrow{CD}$, on obtient l'expression suivante, à retenir.

3. En effet, contre toute attente, *affixe* est un mot masculin.

Proposition. *Soient A, B, C, D quatre points d'affixes respectifs z_A, etc. On suppose que $A \neq B$ et que $C \neq D$. Alors une mesure de l'angle $\big(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\big)$ est :*

$$\big(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\big) \equiv \arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \; [2\pi].$$

4° Alignement et cocyclicité

a) Rapport et alignement

Notation. Soient a, b, c trois complexes tels que $a \neq c$. On introduit le *rapport*

$$[a, b; c] = \frac{c - b}{c - a}.$$

Lemme. *Soient A, B, C trois points, avec $A \neq B$, d'affixes respectifs z_A, z_B, z_C. Alors A, B et C sont alignés si et seulement si leur rapport $[z_A, z_B; z_C]$ est réel.*

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} &\iff \exists k \in \mathbb{R},\; \overrightarrow{CB} = k\,\overrightarrow{CA} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{R},\; z_B - z_C = k(z_A - z_C) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{R},\; k = \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \\ &\iff \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\square$

Remarque. De là une équation complexe de la droite (AB) : pour M d'affixe z distinct de A,

$$M \in (AB) \iff \frac{z - z_B}{z - z_A} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_B}{\bar{z} - \bar{z}_A} \iff \overline{(z_B - z_A)}\, z - (z_B - z_A)\, \bar{z} = z_B \bar{z}_A - z_A \bar{z}_B.$$

En général, une équation de la forme $m\bar{z} + \bar{m}\, z = i\alpha$ avec $m \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ est celle d'une droite.

b) Birapport et cocyclicité

Notation. Étant donné quatre complexes distincts a, b, c, d, on forme leur *birapport*

$$[a, b, c, d] = \frac{[a, b; c]}{[a, b; d]} = \frac{c - b}{c - a} : \frac{d - b}{d - a} = \frac{(c - b)(d - a)}{(c - a)(d - b)}.$$

(C'est donc un rapport de rapports.)

Proposition (Critère de cocyclicité)**.** *Soient A, B, C, D quatre points distincts d'affixes z_A, z_B, z_C, z_D. Alors A, B, C, D sont cocycliques ou alignés si et seulement si $[z_A, z_B, z_C, z_D] \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Supposons que les points soient alignés. Alors les rapports $[z_A, z_B; z_C]$ et $[z_A, z_B; z_D]$ sont réels donc leur quotient $[z_A, z_B, z_C, z_D]$ aussi.
Supposons que les points soient sur un cercle de centre Ω (d'affixe ω) et de rayon r. Alors $\Omega A = r$, d'où $|z_A - \omega| = r$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $z_A - \omega = re^{i\alpha}$. De même, il existe $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $z_B = \omega + re^{i\beta}$, $z_C = \omega + re^{i\gamma}$ et $z_D = \omega + re^{i\delta}$. Alors en « factorisant l'arc moitié », il vient :

$$[z_A, z_B; z_C] = \frac{z_C - z_B}{z_C - z_A} = \frac{re^{i\gamma} - re^{i\beta}}{re^{i\gamma} - re^{i\alpha}} = \frac{e^{i\gamma/2} e^{i\beta/2}}{e^{i\gamma/2} e^{i\alpha/2}} \times \frac{e^{i\frac{\gamma}{2} - i\frac{\beta}{2}} - e^{-i\frac{\gamma}{2} + i\frac{\beta}{2}}}{e^{i\frac{\gamma}{2} - i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\gamma}{2} - i\frac{\alpha}{2}}} = \frac{e^{i\beta/2}}{e^{i\alpha/2}} \times \frac{2i \sin\frac{\gamma - \beta}{2}}{2i \sin\frac{\gamma - \alpha}{2}}.$$

On trouve ainsi :

$$[z_A, z_B, z_C, z_D] = \frac{[z_A, z_B; z_C]}{[z_A, z_B; z_D]} = \frac{e^{i\beta/2}}{e^{i\alpha/2}} \times \frac{\sin\frac{\gamma-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}} \times \frac{e^{i\alpha/2}}{e^{i\beta/2}} \times \frac{\sin\frac{\delta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\delta-\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\delta-\alpha}{2}}{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\delta-\beta}{2}} \in \mathbb{R}.$$

La réciproque sera admise. □

Vous connaissez sans doute ce théorème sous la forme suivante.

Corollaire. *(Même situation.) Les points A, B, C, D sont cocycliques ou alignés si et seulement si* $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}})$ $[\pi]$.

Démonstration. En effet, on a : $\arg[z_A, z_B, z_C, z_D] \equiv (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) - (\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}})$ $[2\pi]$ et les réels sont les complexes dont l'argument est 0 ou π modulo 2π, c'est-à-dire nuls modulo π. □

C'est un exercice instructif de démontrer le théorème de l'angle inscrit.

Proposition. *Soient A et B, C trois points distincts sur un cercle de centre Ω. Alors*

$$(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \ [2\pi].$$

II Transformations géométriques

Rappelons une post-ultime fois que le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé (O, e_1, e_2).

1° Position du problème

On va considérer un certain nombre de transformations du plan, c'est-à-dire de bijections de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$. Si F est une de ces transformations, on lui associe une bijection $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la façon suivante : pour $z \in \mathbb{C}$, on considère le point M d'affixe z et on définit $f(z)$ comme l'affixe de l'image M' de M par F.

En termes plus sophistiqués, si on note $\mathbf{A} : \mathscr{P} \to \mathbb{C}$ la bijection qui à un point M de $\mathscr{P}$, associe son affixe $z = \mathbf{A}(M)$, la correspondance entre F et f est (vérifier !) : $f = \mathbf{A} \circ F \circ \mathbf{A}^{-1}$ ou, ce qui revient au même : $F = \mathbf{A}^{-1} \circ f \circ \mathbf{A}$. Il revient au même de se donner F ou f.

Dans cette situation, on dira que « f est l'écriture complexe de F » ou que « F est la transformation géométrique correspondant à f ».

2° Translations

a) Définition

Définition. Soit u un vecteur. On appelle translation de vecteur u et on note (ici, entre nous) T_u l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie ainsi. L'image d'un point M est l'unique point M' tel que

$$\overrightarrow{MM'} = u.$$

Le lemme suivant est facile et utile mais il n'a pas été vu en amphi.

Lemme. (i) *L'identité est la translation de vecteur $\overrightarrow{0}$.*
(ii) *La composée de deux translations de vecteurs u et u' est la translation de vecteur $u + u'$.*
(iii) *Si u est un vecteur quelconque, T_u est bijective et la bijection réciproque est : $T_u^{-1} = T_{-u}$.*

Démonstration. (i) Si $u = \overrightarrow{0}$, on a, pour $M \in \mathscr{P}$ et $M' = T_{\overrightarrow{0}}(M)$: $MM' = \overrightarrow{0}$, *i.e.* $M = M'$.
(ii) Pour M quelconque, $M' = T_u(M)$ et $M'' = T_{u'}(M')$, on a : $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = u + u'$.
(iii) En prenant $u' = -u$, on voit que $T_u \circ T_{-u} = T_{\overrightarrow{0}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$ et, de même : $T_{-u} \circ T_u = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$. □

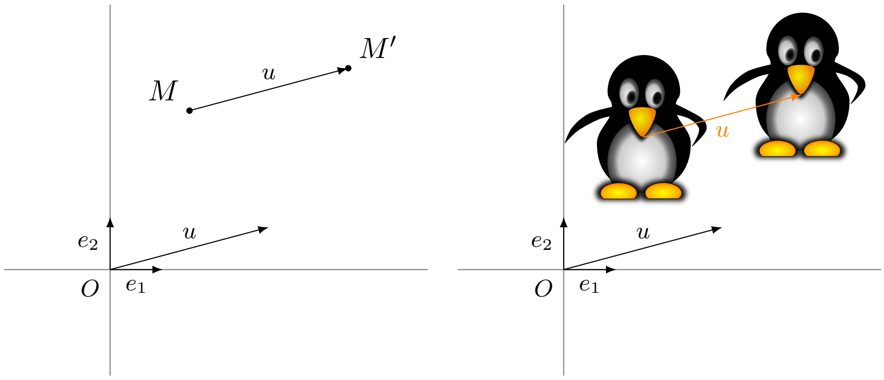

FIGURE 5 – Effet d'une translation de vecteur u

b) Écriture complexe

Lemme. *Soit u un vecteur, soit w son affixe et soit T_u la translation de vecteur u. Alors, si M est un point de $\mathscr{P}$ d'affixe z et si z' est l'affixe de son image $M' = T_u(M)$, on a :*

$$z' = z + w.$$

Autrement dit, l'écriture complexe de T_u est $t_u : z \mapsto z + w$.

Démonstration. Avec ces notations, on a : $\overrightarrow{MM'} = u$, ce qui donne : $z' - z = w$. Terminé. □

3° Homothéties

a) Définition

Définition. Soit Ω un point et k un réel non nul. On appelle *homothétie* de centre Ω et de rapport k et on note (ici, entre nous) $H_{\Omega,k}$ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie ainsi. L'image d'un point M est l'unique point M' tel que

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}.$$

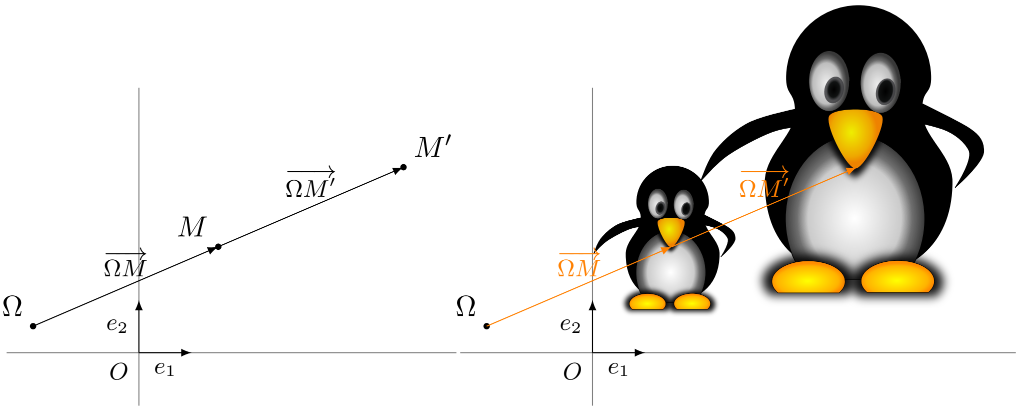

FIGURE 6 – Effet d'une homothétie de centre Ω et de rapport 2

Remarque. Si $k \neq 1$, l'homothétie $H_{\Omega,k}$ admet un unique point fixe : Ω. En effet, M est fixe SSI $M' = M$ SSI $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ SSI $k\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega M}$ SSI $(1-k)\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{0}$ SSI $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{0}$ (car $1 - k \neq 1$).

Le lemme suivant est facile et utile mais il n'a pas été vu en amphi.

Lemme. (i) *Pour tout point* Ω*, l'identité est l'homothétie de centre* Ω *et de rapport* 1.
(ii) *La composée de deux homothéties de même centre* Ω *et de rapports* k *et* k' *est l'homothétie de centre* Ω *ayant pour rapport le produit des rapports* kk'.
(iii) *Une homothétie de centre* Ω *et de rapport* k *est bijective et la bijection réciproque est l'homothétie de centre* Ω *et de rapport* $1/k$.

Démonstration. (i) Si $k = 1$, on a : $\overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M}$ donc $M' = H_{\Omega_k}(M) = M$ pour tout M.
(ii) Si $M' = H_{\Omega,k}(M)$ et $M'' = H_{\Omega,k'}(M')$, alors on a : $\overrightarrow{\Omega M''} = k'\overrightarrow{\Omega M'} = k'k\overrightarrow{\Omega M}$.
(iii) Cela résulte de (i) et (ii) en prenant $k' = 1/k$. □

b) Écriture complexe

Lemme. *Soient* Ω *un point,* ω *son affixe,* k *un réel non nul et soit* $H_{\Omega,k}$ *l'homothétie de centre* Ω *et de rapport* k*. Alors, si* M *est un point de* $\mathscr{P}$ *d'affixe* z *et si* z' *est l'affixe de son image* $M' = H_{\Omega,k}(M)$*, on a :*

$$z' = k(z - \omega) + \omega = kz + (1 - k)\omega.$$

Autrement dit, l'écriture complexe de $H_{\Omega,k}$ *est* $h_{\Omega,k} : z \mapsto kz + (1 - k)\omega$.

Démonstration. Avec ces notations, on a : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$, d'où : $z' - \omega = k(z - \omega)$. Terminé. □

Exercice. Soient k un réel, b un complexe et soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = kz + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Si $k = 1$, alors f est l'écriture complexe de la translation de vecteur ayant pour affixe b. Si $k \neq 1$, alors f a un unique point fixe $w = b/(1 - k)$ et c'est l'écriture complexe de l'homothétie de centre Ω, le point d'affixe w, et de rapport k.

Exercice (pas vu en amphi). Soient H et H' deux homothéties de rapports k et k' et de centres quelconques. Montrer que la composée $H \circ H'$ est une translation si $kk' = 1$ et que c'est une homothétie si $kk' \neq 1$. *(Utiliser l'exercice précédent.)*

4° Rotations

a) Définition

Définition. Soit Ω un point et θ un réel. On appelle *rotation* de centre Ω et d'angle θ et on note (ici, entre nous) $R_{\Omega,\theta}$ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie ainsi. L'image d'un point M est l'unique point M' tel que

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \ [2\pi] \quad \text{si } M \neq \Omega. \end{cases}$$

Est-ce bien défini ? Existe-t-il toujours un tel point M' ? Est-il bien unique ? Pour le montrer, le plus simple est de passer en complexes ! Il n'y a pas de problème si $M = \Omega$, alors l'image est Ω ($\Omega M' = 0$ donne $M' = \Omega$).
Soit M un point distinct de Ω, on note z son affixe et ω celui de Ω. Soit encore M' un autre point, différent de Ω, d'affixe z'. Vu que $z \neq \omega$, on a :

$$\Omega M' = \Omega M \iff |z' - \omega| = |z - \omega| \iff \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1.$$

D'autre part, on traduit la condition portant sur les angles en termes d'arguments :

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta \ [2\pi] \iff \arg \frac{z' - \omega}{z - \omega} \equiv \theta \ [2\pi].$$

Autrement dit, on connaît le module et l'argument de $\frac{z'-\omega}{z-\omega}$:

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = e^{i\theta},$$

ce qui est équivalent à :

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Cela prouve que la définition est bien formée et nous donne l'écriture complexe d'une rotation.

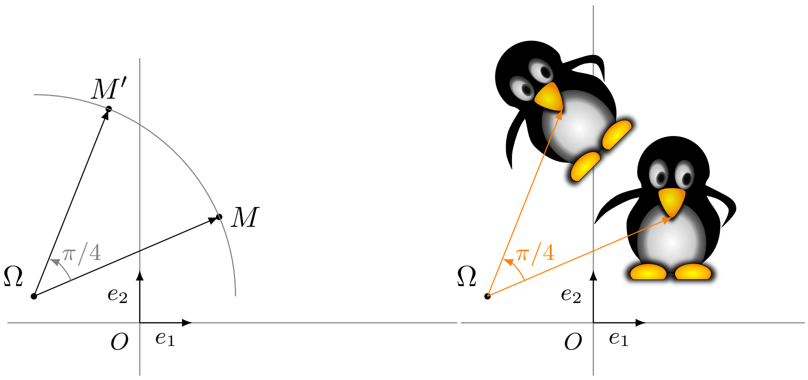

FIGURE 7 – Effet d'une rotation de centre Ω et d'angle $\pi/4$

Lemme. *Soient Ω un point, ω son affixe, θ un réel et $R_{\Omega,\theta}$ la rotation de centre Ω et d'angle θ. Alors, si M est un point de $\mathscr{P}$ d'affixe z et si z' est l'affixe de son image $R_{\Omega,\theta}(M)$, on a :*

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Autrement dit, l'écriture complexe de $R_{\Omega,\theta}$ est $r_{\Omega,\theta} : z \mapsto e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.

Le lemme suivant est facile et utile mais il n'a pas été vu en amphi.

Lemme. (i) *Pour tout point Ω, l'identité est la rotation de centre Ω et d'angle nul.*
(ii) *La composée de deux rotations de même centre Ω et d'angles θ et θ' est la rotation de centre Ω ayant pour angle la somme des angles $\theta + \theta'$.*
(iii) *Une rotation de centre Ω et d'angle θ est bijective et la bijection réciproque est la rotation de centre Ω et d'angle $-\theta$.*

Démonstration. (i) Si $\theta = 0$, on a : $r_{\Omega,\theta}(z) = e^{0i}(z - \omega) + \omega = z$.
(ii) Si $z' = r_{\Omega,\theta}(z) = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ et $z'' = r_{\Omega,\theta'}(z') = e^{i\theta'}(z' - \omega) + \omega$, alors on a : $z'' = e^{i\theta'}(z' - \omega) + \omega = e^{i\theta'}\big(e^{i\theta}(z - \omega)\big) + \omega = e^{i(\theta+\theta')}(z - \omega) + \omega$.
(iii) Cela résulte de (i) et (ii) en prenant $\theta' \equiv -\theta \ [2\pi]$. □

Exercice (pas vu en amphi). Soient a un complexe de module 1, b un complexe et soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = az + b$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Si $a = 1$, alors f est l'écriture complexe de la translation de vecteur ayant pour affixe b. Si $a \neq 1$, alors f a un unique point fixe $\omega = b/(1 - a)$ et c'est l'écriture complexe de la rotation de centre Ω ayant pour affixe ω et d'angle $\arg(a)$.

5° Similitudes directes

a) Définition

Définition. Soient Ω un point, k un réel strictement positif[4] et θ un réel. On appelle *similitude directe* de centre Ω, de rapport k et d'angle θ et on note (ici, entre nous) $S_{\Omega,k,\theta}$ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ définie ainsi. L'image d'un point M est l'unique point M' tel que

$$\begin{cases} \Omega M' = k \cdot \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta \ [2\pi] \quad \text{si } M \neq \Omega. \end{cases}$$

Est-ce bien défini ? Y a-t-il toujours un unique point M' ? Il n'y a pas de problème si $M = \Omega$, alors l'image est Ω ($\Omega M' = 0$ donne $M' = \Omega$).
Soit $M \neq \Omega$, soit z son affixe et ω celui de Ω. Soit $M' \neq \Omega$ un point quelconque d'affixe z'. Vu que $z \neq \omega$ et $k > 0$, on a :

$$\Omega M' = k \cdot \Omega M \iff |z' - \omega| = k|z - \omega| \iff \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = k.$$

D'autre part, on traduit la condition portant sur les angles en termes d'arguments :

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta \ [2\pi] \iff \arg \frac{z' - \omega}{z - \omega} \equiv \theta \ [2\pi].$$

Autrement dit, on connaît le module et l'argument de $\frac{z'-\omega}{z-\omega}$:

$$\frac{z' - \omega}{z - \omega} = ke^{i\theta},$$

ce qui est équivalent à :

$$z' = ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Cela prouve que la définition est bien formée et nous donne l'écriture complexe d'une similitude.

Lemme. *Soient Ω un point, ω son affixe, k un réel strictement positif, θ un réel et soit $S_{\Omega,k,\theta}$ la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ. Alors, si M est un point de $\mathscr{P}$ d'affixe z et si z' est l'affixe de son image $M' = S_{\Omega,k,\theta}(M)$, on a :*

$$z' = ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Autrement dit, l'écriture complexe de $S_{\Omega,k,\theta}$ est $s_{\Omega,k,\theta} : z \mapsto ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega$.

Exercice. Vérifier que :
- si $k = 1$ et $\theta \equiv 0$, $S_{\Omega,k,\theta}$ est l'identité ;
- si $\theta \equiv 0 \ [2\pi]$, $S_{\Omega,k,\theta} = H_{\Omega,k}$; si $\theta \equiv \pi \ [2\pi]$, $S_{\Omega,k,\theta} = H_{\Omega,-k}$;
- si $k = 1$, $S_{\Omega,k,\theta} = R_{\Omega,\theta}$;
- enfin, que $S_{\Omega,k,\theta} = R_{\Omega,\theta} \circ H_{\Omega,k} = H_{\Omega,k} \circ R_{\Omega,\theta}$, ce qui est suggéré par les pingouins semi-transparents de la figure 8.

4. Noter la différence avec le cas des homothéties ! Ici, on n'autorise pas $k < 0$.

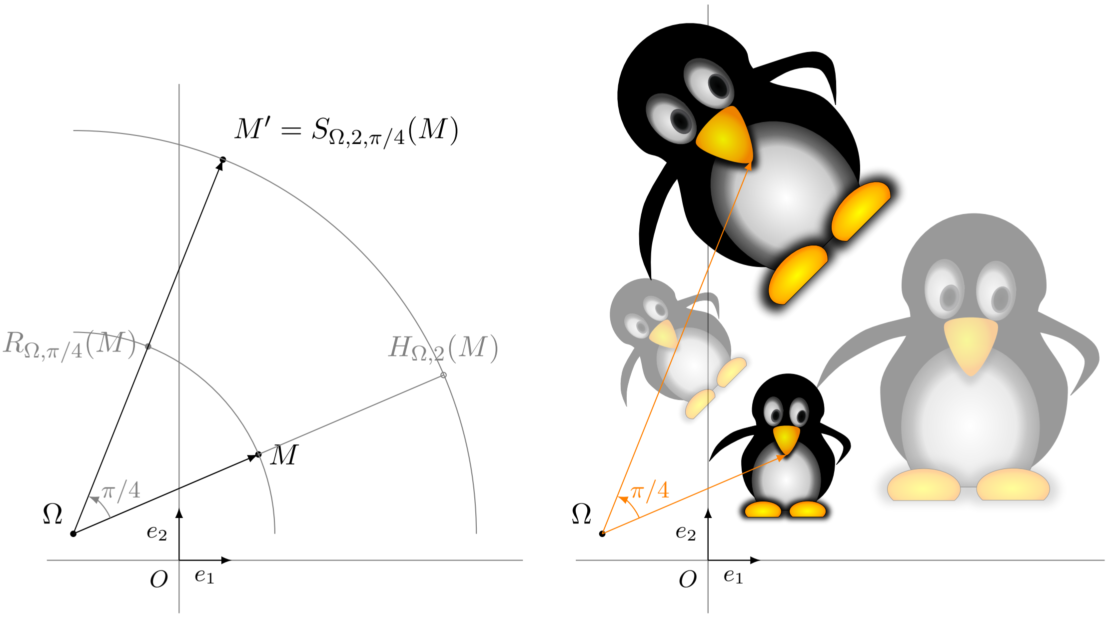

FIGURE 8 – Effet d'une similitude de centre Ω, de rapport 2 et d'angle $\pi/4$

b) Similitudes directes et applications affines complexes

Toutes les transformation que l'on a vues jusqu'à présent ont une écriture complexe de la forme $z \mapsto az + b$, c'est-à-dire une « applications affines complexes » :
- c'est une translation SSI $a = 1$, ;
- c'est une homothétie SSI $a = k \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$;
- c'est une rotation SSI $a = e^{i\theta}$ a pour module 1 ;
- pour une similitude directe, $a = ke^{i\theta}$ et $b = \omega - ke^{i\theta}\omega$.

On va terminer la classification.

Proposition. *Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto az + b$. De deux choses l'une :*

(a) *si $a = 1$, alors f est l'écriture complexe de la translation de vecteur d'affixe b ;*

(b) *si $a \neq 1$, alors f a un unique point fixe $\omega = b/(1 - a)$ et f est la similitude directe de centre Ω ayant pour affixe ω, de rapport $k = |a|$ et d'angle n'importe quel $\theta \equiv \arg a$ $[2\pi]$.*

Démonstration. On a déjà traité et retraité le cas $a = 1$. Supposons $a \neq 1$. Soit z un complexe. Alors, comme $1 - a \neq 0$:

$$f(z) = z \iff z = az + b \iff (1 - a)z = b \iff z = \frac{b}{1 - a}.$$

Notons $w = b/(1 - a)$. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z' = f(z)$. Écrivons alors côte à côte[5] :

$$\begin{cases} z' = az + b \\ w = aw + b \end{cases} \qquad \text{d'où} \quad z' - w = a(z - w).$$

En termes géométriques, si Ω est le point d'affixe w et si $z \neq w$, on a en séparant module et argument : $\Omega M' = |a| \cdot \Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M'}, \overrightarrow{\Omega M}\right) \equiv \theta$ $[2\pi]$. □

5. C'est une idée importante, la *linéarité*, qui nous occupera au S2.

c) Invariants par une similitude directe [pas vu en amphi]

Proposition. *Soit S une similitude directe du plan. Alors, pour tous points A, B, C, D du plans tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, on a, en notant $A' = S(A)$, etc. :*

(i) *dilatation des distances : il existe $k > 0$ indépendant de A et B tel que $A'B' = k \cdot AB$;*

(ii) *préservation des rapports de distances : $\dfrac{C'D'}{A'B'} = \dfrac{CD}{AB}$;*

(iii) *préservation des angles orientés : $\big(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\big) = \big(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\big)$ $[2\pi]$.*

Démonstration. Soit s l'écriture complexe de S. Par la proposition précédente, il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $s(z) = az + b$. Alors, en notant z_A l'affixe de A, etc., il vient :

$$|z_{B'} - z_{A'}| = \big|az_B + b - (az_A + b)\big| = |a|\,|z_B - z_A|,$$

d'où la propriété (i) avec $k = |a|$. D'autre part, on calcule :

$$\frac{z_{D'} - z_{C'}}{z_{B'} - z_{A'}} = \frac{az_D + b - (az_C + b)}{az_B + b - (az_A + b)} = \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}.$$

En prenant le module, on obtient (ii) ; en prenant l'argument, il nous sort (iii). □

La « réciproque » est plus difficile et sera admise.

Théorème. *Soit S une bijection du plan dans lui-même qui préserve l'alignement et les angles orientés, c'est-à-dire :*

(i) *si A, B, C sont alignés, alors $S(A)$, $S(B)$ et $S(C)$ sont alignés ;*

(ii) *si A, B, C, D sont quatre points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$ et si A', B', C', D' sont leurs images, alors $\big(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\big) = \big(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\big)$ $[2\pi]$.*

Alors S est une similitude directe : il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que s, l'écriture complexe de S, soit :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \ s(z) = az + b.$$

Théorème. *Soit S une bijection du plan dans lui-même qui préserve les rapports de distance : il existe un réel $k > 0$ tel que pour tous points distincts A, B d'images respectives A', B', on a : $A'B' = k\,AB$.*
Alors S est une similitude : il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que s, l'écriture complexe de S soit de l'une des deux formes suivantes :

— *soit $\forall z \in \mathbb{C},\ \ s(z) = az + b$,*
— *soit $\forall z \in \mathbb{C},\ \ s(z) = a\overline{z} + b$.*