Université Claude Bernard Lyon 1
L1 de Mathématiques : Algèbre
Année 2014–2015

Nombres complexes

I Introduction en forme de vade-mecum

Ce qu'il faut retenir dans une coquille de noix.

- (àspc) on appelle *argument* d'un complexe non nul z tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$; tous les arguments sont égaux à 2π près ; l'argument principal $\arg(z)$ est l'unique argument qui appartient à $]-\pi, \pi]$;
- mise en garde : la relation $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ est fausse en général ! (pourquoi ?) elle est vraie à 2π près ;
- en pratique, un nombre complexe z possède deux représentations :
  - « forme algébrique » : $z = x + iy$, où x et y sont deux réels bien définis ; cette écriture est adaptée aux opérations linéaires (addition, multiplication par un réel) ;
  - « forme géométrique » : $z = \rho e^{i\theta}$, où $\rho \geqslant 0$ est unique et, si $z \neq 0$, θ est unique à 2π près ; cette écriture est adaptée aux produits et aux quotients ;
  - (àspc) l'unicité des écritures se traduit par les critères d'égalité suivants :
    - $x + iy = x' + iy'$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$;
    - (si $z \neq 0$) $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$ si et seulement si $\rho = \rho'$ et $\theta \equiv \theta' \, [2\pi]$;
- les racines n^{es} se retrouvent instantanément si on cherche les racines de $re^{i\alpha}$ sous forme géométrique $\rho e^{i\theta}$; les critères ci-dessus donnent tout de suite : $\rho^n = r$ et $n\theta \equiv \alpha \, [2\pi]$, égalités qui donnent ρ exactement ($\rho = r^{1/n}$) et θ à $2\pi/n$ près ($\theta = (\alpha + 2k\pi)/n$ pour k entier convenable).

II Construction

1° Un rêve

a) Ce qui manque. Passons rapidement en revue la construction des nombres. On rencontre quelques représentants de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels dès ses premiers dénombrements, en fin de maternelle. L'élément 0 est un concept non trivial mais, à l'âge où le lecteur lit ces lignes, il s'y est sans doute habitué. En début de collège, on agrandit $\mathbb{N}$ pour rendre possibles toutes les soustractions, ce qui conduit à construire $\mathbb{Z}$. On peut alors résoudre les équations de la forme $x + a = b$. Puis on systématise l'étude des fractions que l'on a déjà abordées au primaire et on introduit l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels en rendant possibles toutes les divisions. Toutes ou presque : il manque bien sûr la division par zéro que même Chuck Norris ne sait pas faire. On verra au S2 une construction des « fractions rationnelles » qui mime la construction formelle des rationnels omise ici. On peut enfin résoudre les équations de la forme $ax + b = c$.

Mais il manque encore quelque chose. Beaucoup de choses en fait. Par exemple, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$; la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = (u_n + 2/u_n)/2$ pour tout n semble pourtant se rapprocher d'une telle solution ! Il faut donc la chercher dans un ensemble de nombres encore plus gros, l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, dont la construction est à nouveau omise dans le programme de L1. Le progrès est énorme : désormais, toutes les suites raisonnables [1] convergent : $\mathbb{R}$ est complet. Mais ce progrès n'est toujours pas suffisant : certaines équations très naturelles, comme les équations de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif, n'ont pas de solution réelle. C'est à ce problème que le chapitre doit remédier – et de quelle manière, voir le théorème de D'Alembert-Gauss III3°c).

1. Ici, on parle de celles qui devraient converger, c'est-à-dire les suites (u_n) qui satisfont au critère de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n, p \geqslant n_0$, $|u_n - u_p| \leqslant \varepsilon$.

b) Ce que l'on veut préserver. On part de l'idée qu'un ensemble de « nombres », c'est un ensemble où l'on sait calculer. Plus précisément, on a deux opérations, la somme et le produit, et des règles de calcul usuelles. La définition ci-dessus donne un ensemble presque minimal de ces règles pour les réels, d'où l'on peut déduire toutes leurs propriétés algébriques. Il y a donc deux façons de les considérer : d'une part, constater que oui, ce sont des propriétés « évidentes » ; d'autre part, s'émerveiller que tout le reste découle de ces quelques règles naturelles.

Définition. On appelle *corps* un ensemble $\mathbb{K}$ muni de deux opérations, la somme $+ : \mathbb{K}\times\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $(a, b) \mapsto a + b$ et le produit $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ (noté aussi ab ou $a \times b$), tels que :

(i) la somme est *associative* : pour tous a, b, c de $\mathbb{K}$, on a : $(a + b) + c = a + (b + c)$;

(ii) la somme admet un *neutre* : il existe un élément de $\mathbb{K}$ noté 0 tel que pour tout a dans $\mathbb{K}$, on a : $a + 0 = a = 0 + a$;

(iii) tout élément admet un *opposé* : pour tout a de $\mathbb{K}$, il existe un élément a' tel que $a + a' = 0 = a' + a$;

(iv) la somme est *commutative* : pour tous a et b de $\mathbb{K}$, on a : $a + b = b + a$;

(v) le produit est *associatif* : pour tous a, b, c de $\mathbb{K}$, on a : $(ab)c = a(bc)$;

(vi) le produit admet un *neutre* : il existe un élément de $\mathbb{K}$ noté 1 tel que pour tout a dans $\mathbb{K}$, on a : $a \times 1 = a = 1 \times a$;

(vii) le produit est *commutatif* : pour tous a et b de $\mathbb{K}$, on a : $ab = ba$;

(viii) tout élément non nul admet un *inverse* : pour tout a de $\mathbb{K}$ différent de 0, il existe un élément a' tel que $aa' = 1 = a'a$;

(ix) le produit est *distributif* sur la somme : pour tous a, b, c de $\mathbb{K}$, on a [2] : $a(b + c) = ab + ac$ et $(a + b)c = ac + bc$;

(x) les neutre de la somme et du produit sont différents.

Remarque. Les neutres sont uniques : si 0 et $0'$ sont deux neutres, on a ; $0 + 0' = 0$ car $0'$ est neutre et $0 + 0' = 0$ car 0 est neutre, si bien que $0 = 0'$. Idem pour 1.
De même, l'opposé est unique : si un élément a possède deux opposés a' et a'', on a par associativité : $a' = a' + 0 = a' + (a + a'') = (a' + a) + a'' = 0 + a'' = a''$. On le note : $-a$.
Idem pour l'inverse ; on note a^{-1} ou $1/a$ l'inverse d'un élément non nul a.

Remarque. Si toutes les propriétés sont satisfaites sauf la propriété (viii), on dit que $\mathbb{K}$ est un *anneau*. Par exemple, $\mathbb{Z}$ muni des opérations habituelles est un anneau mais pas un corps (les éléments non nuls autres que -1 et 1 n'ont pas d'inverse dans $\mathbb{Z}$).

Voici une propriété si utile qu'on la prouve à mains nues et une définition indispensable aussi.

Lemme. *Dans un corps $\mathbb{K}$, un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :*

$$\forall a, b \in \mathbb{K}, \quad ab = 0 \iff \big(a = 0 \text{ ou } b = 0\big).$$

Démonstration. Supposons d'abord que $b = 0$. On a : $a \times 0 = a \times (0 + 0) = a \times 0 + a \times 0$. En ajoutant aux deux membres l'opposé de $a \times 0$, on trouve : $0 = a \times 0$. On procède de même pour montrer que si $a = 0$, alors $ab = 0$, ou bien on utilise la commutativité. Réciproquement, supposons que $ab = 0$. Il s'agit de montrer que si $a \neq 0$, alors $b = 0$, ce qui équivaut à « $a = 0$ ou $b = 0$ ». De fait, si $a \neq 0$, il possède un inverse a^{-1} et il vient : $b = 1b = a^{-1}ab = a^{-1} \times 0 = 0$.

Définition. Soit $\mathbb{K}$ un corps et a un élément de $\mathbb{K}$. On définit les *puissances* de a ainsi : $a^0 = 1$ (et ce, que a soit nul ou pas ; attention aux conventions différentes dans d'autres contextes) ; $a^1 = a$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a^{n+1} = a^n a$.

2. Dans l'expression $ab+ac$, il faut comprendre $(ab)+(ac)$ selon la convention habituelle de priorité au produit.

c) Ce que l'on va faire. On va construire un ensemble de nombres qui contient les réels, dans lesquels toutes les équations de degré 2 ont une solution (III3°b)) et même toutes les équations polynomiales (III3°c)).

2° Construction formelle

Définition. Comme ensemble, on définit $\mathbb{C}$ comme l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels. On met deux opérations sur $\mathbb{C}$:

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \big((a,b),(a',b')\big) & \longmapsto & (a+a', b+b') \end{array} \quad \text{et} \quad \cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \big((a,b),(a',b')\big) & \longmapsto & (aa'-bb', ab'+ba'). \end{array}$$

Lemme. *Muni de ces opérations, $\mathbb{C}$ est un corps.*

Démonstration. L'associativité et la commutativité de l'addition se vérifient sans peine. Le neutre de l'addition est : $\mathbf{0} = (0,0)$. Alors, pour tout élément $(a,b) \in \mathbb{C}$, on a : $(a,b)+(-a,-b) = \mathbf{0}$, de sorte que (a,b) a pour opposé : $-(a,b) = (-a,-b)$.
L'associativité et la commutativité du produit se vérifient avec un peu de peine.Le neutre de la multiplication est $\mathbf{1} = (1,0)$ car pour tout (a,b), on a : $(a,b)\cdot(1,0) = (a\times 1 - b\times 0, a\times 0 + b\times 1) = (a,b)$.
Reste à trouver un inverse à $(a,b) \neq (0,0)$. Il s'agit de trouver (a',b') tel que :

$$\begin{cases} aa' + bb' = 1 \\ ba' + ab' = 0. \end{cases}$$

On résout sans peine ce système à deux inconnues (a',b') et l'on trouve : $a' = a/(a^2+b^2)$ et $b' = -b/(a^2+b^2)$. La distributivité est un exercice d'écriture fastidieux mais facile.

3° Simplification de l'écriture

a) Considérons l'application suivante : $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $a \mapsto (a,0)$. C'est une injection car si $(a,0) = (a',0)$, alors $a = a'$ et on vérifie que l'on a

$$\varphi(0) = \mathbf{0}, \quad \varphi(1) = \mathbf{1}, \quad \varphi(a+a') = \varphi(a) + \varphi(a'), \quad \varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a')$$

pour tous a et a' réels. On identifiera $\mathbb{R}$ et son image dans $\mathbb{C}$ par φ, ce qui conduit à la définition suivante.

Définition. Soit z un nombre complexe. On dit que z est *réel* s'il appartient à l'image de φ, c'est-à-dire s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $z = \varphi(a)$.

Exercice. Au passage, on dit que z est *imaginaire pur* s'il existe b réel tel que $z = (0,b)$. Montrer que tout complexe peut s'écrire de façon unique comme somme d'un réel et d'un imaginaire pur. (Sens ?)

Notation. Désormais, pour a réel, on notera par abus a le nombre complexe $\varphi(a) = (a,0)$.
En particulier, on notera $0 = \mathbf{0}$ et $1 = \mathbf{1}$.
Enfin, on convient de noter i le nombre complexe : $i = (0,1)$.

b) On calcule :

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\times 0 - 1\times 1, 1\times 0 + 0\times 1) = (-1,0) = -\mathbf{1}.$$

c) Soient a et b réels. On a dans $\mathbb{C}$:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)\cdot(0,1) = \varphi(a) + \varphi(b)i = a + bi.$$

d) Pour résumer, voici ce qu'on appelle la *représentation algébrique* d'un complexe.

Proposition. *Soit z un nombre complexe. Il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que*

$$z = a + bi.$$

Démonstration. En effet, un nombre complexe est, formellement, un couple (a, b) de réels et on a vu que $a + bi$ est simplement une autre écriture pour (a, b).

On peut récrire les opérations avec ces nouvelles notations.

Corollaire. *Soient z et z' des nombres complexes. Il existe d'uniques réels a, b, a', b' tels que $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$. Alors :*

(i) $z + z' = a + a' + (b + b')i$;

(ii) $zz' = aa' - bb' + (ab' + ba')i$;

(iii) *si z n'est pas nul, c'est-à-dire si a ou b n'est pas nul, alors :* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{-b}{a^2 + b^2}i.$

4° Perte de l'ordre

a) Corps ordonnés. Chez les réels, la relation d'ordre $\leqslant$ est compatible avec certaines opérations algébrique. Plus précisément...

Définition. On appelle *corps ordonné* un corps $\mathbb{K}$ (avec ses opérations, ses neutres, etc.) muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ telle que pour tous a, b, c de $\mathbb{K}$, on a :

(i) si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$;

(ii) si $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$, alors $ac \leqslant bc$.

Les éléments *positifs* (resp. *négatifs*) sont les éléments a tels que $a \geqslant 0$ (resp. $a \leqslant 0$).

Lemme. *Soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné. Alors, -1 est strictement négatif et tout carré est positif.*

Démonstration. Soit a un élément de $\mathbb{K}$. Si $a \leqslant 0$, on applique la règle (i) avec $b = 0$ et $c = -a$, on trouve : $0 \leqslant -a$; de même, si $a \geqslant 0$, il vient : $0 \geqslant -a$. Autrement dit, a est positif si et seulement si $-a$ est négatif.
Par la règle (ii) avec $b = 0$ et $c = a$, il vient, si $a \geqslant 0$: $a^2 \geqslant 0$. Mais si $a \leqslant 0$, on a : $-a \geqslant 0$ et $a^2 = (-a)^2 = 0$. Ainsi, un carré est positif. En particulier, $1 = 1^2$ est positif, d'où -1 est négatif.

Corollaire. *Il n'existe pas d'ordre sur $\mathbb{C}$ qui fasse de $\mathbb{C}$ un corps ordonné.*

Démonstration. En effet, -1 est un carré dans $\mathbb{C}$ – c'est le carré de i, par construction. S'il y avait un ordre sur $\mathbb{C}$ compatible aux opérations, -1 serait strictement négatif comme dans n'importe quel corps, et positif en tant que carré. C'est absurbe.

III Propriétés algébriques

1° Parties réelle et imaginaire, conjugaison

Définition. Soit z un nombre complexe. On a vu qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + bi$. On appelle *partie réelle* de z le réel a et *partie imaginaire* de z le réel[3] b.
On appelle *conjugué* de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe : $\overline{z} = a - bi$.

3. Attention, la partie imaginaire de $a + bi$ est bien b et pas bi.

Remarque (à savoir par cœur). Autrement dit, pour tout complexe z, on a :

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)i \quad \text{et} \quad \overline{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)i.$$

On en déduit :

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

On énonce une évidence (de plus...).

Lemme. *Deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales :*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad z = z' \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z'). \end{cases}$$

Exercice. Soit z un complexe. Montrer que z est réel si et seulement si $z = \mathrm{Re}(z)$ si et seulement si $z = \overline{z}$.

Lemme. *La conjugaison préserve somme et produit :*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}, \ \text{ et } \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}.$$

La conjugaison est une involution :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \overline{\overline{z}} = z.$$

2° Module

Lemme. *Soit z un nombre complexe. Alors : $z\overline{z}$ est un réel, il vaut : $z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.*

Bien qu'on ne sache pas définir $\sqrt{z}$ pour un nombre complexe s'il n'est pas un nombre réel positif (et on ne saura toujours pas le faire à la fin du chapitre), le lemme donne un sens à la définition suivante.

Définition. Soit z un nombre complexe. On appelle *module* de z et on note $|z|$ le nombre réel : $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

Remarque. Pour z réel, le module de z (vu comme nombre complexe) coïncide avec la valeur absolue de z (vu comme nombre réel). Pas de conflit de notation.

Proposition. *Soient z et z' deux entiers et k un entier relatif. On a :*

(i) $|z| \geqslant 0$ *et* $\big(|z| = 0$ *si et seulement si* $z = 0\big)$ *;*

(ii) $|z| = |\overline{z}|$ *;*

(iii) $|zz'| = |z|\,|z'|$ *;*

(iv) *si* $z \neq 0$*, alors* $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ *;*

(v) *si* $k \geqslant 0$ *ou si* $z \neq 0$*, alors :* $|z^k| = |z|^k$.

Démonstration. (i) Dans $\mathbb{R}$, un carré est positif ou nul, *a fortiori* une somme de deux carrés l'est aussi. Mais elle ne peut être nulle que si les deux carrés sont nuls, ce qui entraîne la propriété.
(ii) On a : $|\overline{z}| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + (-\mathrm{Im}(z))^2} = |z|$.
(iii) On pose $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$, idem pour z', et on calcule :

$$|zz'|^2 = \left|aa' - bb' + (ab' + ba')i\right|^2 = (aa'-bb')^2 + (ab'+ba')^2 \text{ et } \big(|z|\,|z'|\big)^2 = (a^2+b^2)(a'^2+b'^2),$$

deux expressions que l'on identifie en les développant. Comme $|zz'|$ et $|z|\,|z'|$ sont deux réels positifs qui ont le même carré, ils sont égaux.
(iv) Pour $z \neq 0$, on prend $z' = 1/z$. Il vient : $|z|\,|z'| = |zz'| = |1| = 1$ donc : $|1/z| = 1/|z|$.
(v) On suppose d'abord $k \in \mathbb{N}$ et on procède par récurrence sur k. Pour $k = 0$, l'égalité est vraie car conventionnellement, chaque membre vaut 1. Pour $k = 1$, l'égalité est évidente. Soit k un entier, on suppose que $|z^k| = |z|^k$. Alors, en prenant $z' = z^k$ dans (ii), il vient : $|z^{k+1}| = |z|\,|z^k| = |z|\,|z|^k = |z|^{k+1}$. À présent, si k est strictement inférieur à zéro, on constate que z^k est l'inverse de z^{-k} et on applique (iii).

On vient de voir que le module se comporte au mieux avec produit et puissances – le module du produit est le produit des modules. Avec la somme, c'est plus compliqué.

Proposition (Inégalité triangulaire)**.** *Soient z et z' deux complexes. Alors :*

$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

Démonstration. Pour prouver l'inégalité $|z - z'| \leqslant |z| + |z'|$, qui fait intervenir deux réels positifs ou nuls, il suffit de prouver que l'on a : $|z - z'|^2 \leqslant \big(|z| + |z'|\big)^2$. Or, on a :

$$|z - z'|^2 = (z - z')\,\overline{z - z'} = |z|^2 - z\overline{z'} + \overline{z}z' + |z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{z'})$$

et

$$\big(|z| + |z'|\big)^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2 - |zz'|.$$

L'astuce consiste à introduire $w = z\overline{z'}$ et à remarquer l'égalité : $|zz'| = |z|\,|z'| = |z|\,|\overline{z'}| = |w|$. Il suffit donc de montrer : $-\mathrm{Re}(w) \leqslant |w|$, ce qui est évident :

$$-\mathrm{Re}(w) \leqslant |\,\mathrm{Re}(w)| = \sqrt{\mathrm{Re}(w)^2} \leqslant \sqrt{\mathrm{Re}(w)^2 + \mathrm{Im}(w)^2}.$$

Exercice. Soient z et z' deux complexes non nuls. Montrer que si $|z + z'| = |z| + |z'|$, alors il existe a réel strictement positif tel que $z' = az$.

3° Racines carrées et équations de degré 2

a) Racines carrées

Définition. Soit A un nombre complexe. On appelle *racine carrée* de A tout complexe z dont le carré vaut A, c'est-à-dire tel que $z^2 = A$.

Exemple. Soit $A = 0$. Comme un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, l'égalité $z^2 = 0$ équivaut à $z = 0$. Autrement dit, 0 possède une unique racine carrée, qui est 0.

Exemple. Soit $A = a$ un réel strictement positif. Il existe deux réels dont le carré vaut a qui sont l'opposé l'un de l'autre. Celui qui est positif est appelé la racine carrée (réelle) de a, on le note $\sqrt{a}$ (ou $a^{1/2}$). Pourrait-il y avoir d'autres complexes dont le carré vaut a ? Pour tout complexe z, on a :

$$z^2 = a \;\Leftrightarrow\; z^2 - a = 0 \;\Leftrightarrow\; z^2 - \sqrt{a}^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a}) = 0.$$

Comme un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul, a possède deux racines carrées dans $\mathbb{C}$, qui sont $\sqrt{\alpha}$ et $-\sqrt{\alpha}$. On voit donc que la nouvelle dénomination, qui met $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ sur un pied d'égalité, est une évolution par rapport à celle que l'on connaissait.

Exemple. Soit $A = a$ un réel strictement négatif. Alors $A = -|a|$ et on remarque que $|a| = \sqrt{|a|}^2$ et que $-1 = i^2$. Pour tout complexe z, on a :

$$z^2 = A \iff z^2 - \bigl(-|a|\bigr) = 0 \iff z^2 - i^2\sqrt{|a|}^2 = 0 \iff \bigl(z - i\sqrt{|a|}\bigr)\bigl(z + i\sqrt{|a|}\bigr) = 0.$$

Un produit est nul etc., donc $a < 0$ admet deux racines carrées complexes : $i\sqrt{|a|}$ et $-i\sqrt{|a|}$.

Venons-en à un exemple plus significatif. L'astuce (à connaître !) consiste à ajouter une équation apparemment inutile, ce qui revient à utiliser le lemme essentiellement évident ci-dessous.

Lemme (astuce à connaître)**.** *Soient z et A deux complexes. Alors :*

$$z^2 = A \iff \begin{cases} z^2 = A \\ |z|^2 = |A|. \end{cases}$$

Démonstration. On procède par double implication. Supposons que $z^2 = A$. On doit montrer que $z^2 = A$ et que $|z|^2 = |A|$. La première égalité est évidente et la deuxième est très facile : $|z|^2 = |z^2| = |A|$. D'où l'implication directe. La réciproque est triviale : si $z^2 = A$ et $|z|^2 = |A|$, on a bien $z^2 = A$...

Exemple. Soit $A = 5 - 12i$. On cherche $z = x + yi$ complexe, avec x et y réels, tel que $z^2 = A$. D'après le lemme, on a :

$$\begin{aligned}
z^2 = A &\iff \begin{cases} z^2 = A \\ |z|^2 = |A| \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = 5 - 12i \\ x^2 + y^2 = \sqrt{5^2 + (-12)^2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = -12 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = \frac{5+13}{2} = 9 \\ y^2 = \frac{-5+13}{2} = 4 \\ 2xy = -12 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \\ 2xy = -12 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = -3 \\ b = 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

La dernière équivalence se prouve en écartant deux des quatre cas possibles selon les signes $\pm$. Pour éclairer la preuve du cas général, reformulons la fin du calcul. Dire que $x = \pm 3$, c'est dire qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $x = 3\varepsilon$; idem pour y. Donc :

$$z^2 = A \iff \exists \varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}, \begin{cases} x = 3\varepsilon \\ y = 2\eta \\ 2xy = -12 \end{cases}$$

$$\iff \exists \varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}, \begin{cases} x = 3\varepsilon \\ y = 2\eta \\ 12\varepsilon\eta = -12 \end{cases}$$

$$\iff \exists \varepsilon \in \{-1, 1\}, \begin{cases} x = 3\varepsilon \\ y = -2\varepsilon. \end{cases}$$

La dernière équivalence résulte du fait que $\varepsilon\eta = -1$ équivaut à $\varepsilon = -\eta$. Ainsi, A admet deux racines carrées : $3 - 2i$ et $-3 + 2i$.

Proposition. *Un nombre complexe A admet une ou deux racines carrées. Plus précisément, si A est nul, sa seule racine carrée est 0 ; si A n'est pas nul, il admet deux racines carrées distinctes qui sont opposées l'une de l'autre.*

Démonstration. Écrivons $A = a + bi$, avec a et b réels. On cherche $z = x + yi$ complexe, avec x et y réels, tel que $z^2 = A$. On suppose $b \neq 0$, sans quoi A est réel et on est dans la situation des premiers exemples. On réutilise l'astuce contenue dans le lemme ci-dessus.

$$z^2 = A \iff \begin{cases} z^2 = A \\ |z|^2 = |A| \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

On vérifie que $\pm a + \sqrt{a^2 + b^2}$ est strictement positif : en effet, comme $b \neq 0$, on a : $a^2 < a^2 + b^2$ et donc : $\mp a \leqslant |a| = \sqrt{a^2} < \sqrt{a^2 + b^2}$. Posons alors :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

En revenant au deuxième exemple si nécessaire, il vient :

$$z^2 = A \iff \exists \varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}, \begin{cases} x = \varepsilon\alpha \\ y = \eta\beta \\ 2xy = b \end{cases}$$

On va remplacer x par $\varepsilon\alpha$ et y par $\eta\beta$ dans la troisième équation. Or, on a :

$$\alpha\beta = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}{4}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2-a^2}}{2} = \frac{|b|}{2},$$

ce qui donne :

$$z^2 = A \iff \exists \varepsilon, \eta \in \{-1,1\},\ \begin{cases} x = \varepsilon\alpha \\ y = \eta\beta \\ \varepsilon\eta|b| = b. \end{cases}$$

Puisque $\varepsilon \in \{-1,1\}$, on a : $1/\varepsilon = \varepsilon$ et la dernière équation devient : $\eta = \varepsilon\,\mathrm{sgn}(b)$, où $\mathrm{sgn}(b) = b/|b|$ est le signe de b. Au bilan, A admet exactement deux racines carrées : $\pm(\alpha + \mathrm{sgn}(b)\beta i)$, c'est-à-dire

$$\varepsilon\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}i\right), \quad \varepsilon \in \{-1,1\}.$$

Mise en garde. *Comme un complexe A admet* deux *racines carrées (s'il n'est pas nul) et qu'il n'y a pas de moyen naturel d'en choisir une (par exemple, la notion de positivité n'a pas de sens sur $\mathbb{C}$), il est tout à fait hors de propos de parler de « la » racine carrée de A et encore moins d'écrire $\sqrt{A}$ (à moins que A ne soit un réel positif).*

Mise en garde. *Cette formule vaguement ignoble n'est pas à retenir mais il faut savoir calculer les racines carrées en suivant la preuve ou les exemples ci-dessus.*

b) Équations de degré 2

Proposition. *Soient a, b, c trois complexes, a non nul. Il existe un ou deux nombres complexes z tels que $az^2+bz+c=0$, c'est ou ce sont :*

$$\frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } \frac{-b-\delta}{2a},$$

où δ est l'une des deux racines carrées de $\Delta = b^2-4ac$.
(Plus précisément, si Δ est nul, l'équation $az^2+bz+c=0$ admet une unique solution $-b/(2a)$; si Δ n'est pas nul, elle en admet deux distinctes.)

Mise en garde. *Le premier qui écrit $\sqrt{\Delta}$ dans une situation où Δ est un complexe qui n'est pas un réel positif en reçoit une*[4]*. Les suivants aussi.*

Démonstration. Soit $\Delta = b^2-4ac$. Soit δ une racine carrée de Δ, c'est-à-dire un complexe tel que $\delta^2 = b^2-4ac$. On réduit le polynome à sa forme canonique :

$$az^2+bz+c = a\left[z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right].$$

Cette dernière expression se factorise $\big(A^2-B^2=(A+B)(A-B)\big)$:

$$az^2+bz+c = a\left(z+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right),$$

et l'on conclut en arguant qu'un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

4. Réprimande ou admonestation, voire engueulade.

c) Équations polynomiales générales

On admet le théorème suivant [5].

Théorème (D'Alembert-Gauss)**.** *Soient n un entier naturel non nul et $a_0, \dots, a_n$ des complexes, a_n non nul. Il existe un complexe z tel que*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Autrement dit, toute équation polynomiale non triviale possède une solution. On verra au S2 qu'elle en possède en fait n si on les compte convenablement.

4° Deux formules utiles

Les deux formules suivantes servent en permanence. Il faut les connaître dans un sens et dans l'autre – savoir factoriser une somme en produit et un produit en somme.

a) Différence de puissances

Proposition. *Soient n un entier naturel non nul et a, b deux complexes. Alors :*

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}.$$

Exemple. Pour $n = 2$, on retrouve le fameux : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
Pour $n = 3$, il *faut* connaître : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
En remplaçant b par $-b$, on trouve : $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.
Si $a \neq 1$ et $b = 1$, on peut écrire :

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1.$$

Démonstration. On développe le membre de droite, on fait un changement d'indice ($\ell = k+1$) puis on simplifie presque tout :

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k n^{n-k+1} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} a^{\ell} b^{n-\ell+1} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k n^{n-k+1} \\ &= a^n - b^n,\end{aligned}$$

puisque tous les termes des deux sommes sont égaux, sauf le dernier de la première somme ($\ell = n$) et le premier de la deuxième somme ($k = 0$).

b) Rappels sur les coefficients binômiaux

Définition. Soients n et k deux entiers. On définit :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. Il est appelé théorème de D'Alembert en France, théorème de Gauss en Allemagne, théorème fondamental de l'algèbre dans le monde anglo-saxon. À dire vrai, la preuve proposée par D'Alembert était fausse mais la première preuve pourrait être celle de Lagrange, quelques semaines avant Gauss...

Exemple. Les coefficients correspondant aux petites valeurs de n et k sont à connaître par cœur :

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	**6**	**4**	1	
5	1	5	10	**10**	5	1

Lemme. *Soient n et k deux entiers avec $n \geqslant 1$. Alors :* $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Démonstration. Soit n un entier, $n \geqslant 1$. La formule est évidente si $k < 0$ ou si $k > n$, les trois coefficients binomiaux sont nuls. Si $k = 0$, l'égalité à prouver se réduit à $1 = 1 + 0$; si $k = n$, à $1 = 0 + 1$. On suppose désormais que $1 \leqslant k \leqslant n - 1$ et on calcule :

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k)\times(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{k\times(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-k+k)\times(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

c) Formule du binôme de Newton

Proposition. *Soient n un entier naturel et a, b deux complexes. Alors :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Démonstration. On procède par récurrence. Pour $n = 0$, les deux membres valent 1 de façon conventionnelle. Pour $n = 1$, la formule est évidente : $a + b = a + b$. Soit n un entier, on suppose connaître le développement de $(a+b)^{n-1}$. On calcule :

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= (a+b)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^k b^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{k+1}b^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\binom{n-1}{\ell-1}a^{\ell}b^{n-\ell} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^k b^{n-k} \qquad (\ell = k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right]a^k b^{n-k}\end{aligned}$$

où, pour regrouper les deux sommes, on utilise l'annulation de $\binom{n-1}{\ell-1}$ pour $\ell = 0$ et de $\binom{n-1}{k}$ pour $k = n$.

Exemple. Pour $a = 1$ et $b = x$, on trouve : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n$.
En particulier, pour $x = \pm 1$: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0$.

IV Arguments

1° Fonctions trigonométriques

a) On admet ici l'existence et les propriétés des fonctions cosinus et sinus, qui sont démontrées ailleurs. Rappelons-les. Les fonctions cosinus et sinus sont deux fois dérivables et l'on a [6] :

$$\begin{cases} \cos' = -\sin \\ \sin' = \cos, \end{cases} \qquad \cos'' + \cos = 0, \quad \sin'' + \sin = 0, \qquad \begin{cases} \cos(0) = 1 \\ \sin(0) = 0. \end{cases}$$

On a les formules d'addition :

$$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \cos(\theta + \theta') = \cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta' \\ \sin(\theta + \theta') = \sin\theta \cos\theta' + \cos\theta \sin\theta'. \end{cases}$$

Il existe un réel π strictement positif tel que le cosinus est strictement positif sur $[0, \pi/2[$ et $\cos(\pi/2) = 0$. La fonction cosinus est paire, alors que la fonction sinus est impaire. Toutes deux sont périodiques et leur plus petite période positive est 2π. Voici les tableaux de variations de cos et sin sur $[-\pi, \pi]$.

x	$-\pi$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	-1	0	1	0	-1
sin	0	-1	0	1	0

b) On doit résoudre un système bien particulier.

Proposition. *Soient a, b deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$. Il existe un unique $\theta \in \,]-\pi, \pi]$ tel que*

$$\begin{cases} \cos\theta = a \\ \sin\theta = b. \end{cases}$$

Démonstration. Remarquons que l'égalité $a^2 + b^2 = 1$ donne : $0 \leqslant a^2 = 1 - b^2 \leqslant 1$. Par suite, $|a| \leqslant 1$; autrement dit : $a \in [-1, 1]$. D'après son tableau de variations, le cosinus est continu et strictement décroissant sur sur $[0, \pi]$ (resp. $[-\pi, 0]$). Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle établit une bijection de $[0, \pi]$ (resp. $[-\pi, 0]$) sur $[-1, 1]$. Il existe donc un unique $\theta_0 \in [0, \pi]$ tel que $\cos\theta_0 = a$ (resp. un unique $\theta_1 \in [-\pi, 0]$ tel que $\cos\theta_1 = a$ et c'est : $\theta_1 = -\theta_0$).
On a : $|b| = \sqrt{1 - a^2} = \sqrt{1 - \cos^2\theta_0} = |\sin\theta_0|$. Comme $\theta_0 \in [0, \pi]$, on a par les variations du sinus : $|\sin\theta_0| = \sin\theta_0$. Si $b \geqslant 0$, on a donc : $b = \sin\theta_0$. Sinon, on a : $b = -|b| = \sin(-\theta_0)$. Cela établit l'existence de θ : on prend $\theta = \theta_0$ si $b \geqslant 0$, $\theta = \theta_1 = -\theta_0$ si $b < 0$.
Pour montrer l'unicité, supposons que $\theta \in \,]-\pi, \pi]$ convienne. Si $b < 0$, alors $\sin\theta < 0$ et donc, par les variations de sinus, on a : $\theta \in \,]-\pi, 0[$. Comme $\cos\theta = \cos\theta_1$ et que le cosinus est injectif sur $[-\pi, 0]$, il vient : $\theta = \theta_1$. Si $b \geqslant 0$, alors $\theta \in [0, \pi]$ et, par injectivité du cosinus sur cet intervalle, il vient de même : $\theta = \theta_0$.

6. Le système ou une des équations, avec les valeurs en zéro, permettent de tout reconstruire.

2° Nombres complexes de module 1

a) Définition des arguments

Définition. Soit z un nombre complexe de module 1. On a donc : $\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = 1$. On appelle *argument principal* de z et on note $\arg(z)$ le réel $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$ tel que

$$\begin{cases} \cos\theta = \mathrm{Re}(z) \\ \sin\theta = \mathrm{Im}(z), \end{cases} \tag{A}$$

dont l'existence et l'unicité sont assurés par la proposition précédente.
Plus généralement, on appelle *argument* de z tout réel θ qui est solution du système (A).

Proposition. *Soit z un nombre complexe de module* 1. *Alors z possède une infinité d'arguments. Si θ_1 est l'un d'entre eux, par exemple l'argument principal, les arguments de z sont les éléments de l'ensemble :*

$$\mathrm{Arg}(z) = \big\{\theta_1 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\big\}.$$

Démonstration. Soit θ un argument de z. Montrons qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que l'on ait : $-\pi < \theta + 2\ell\pi \leqslant \pi$. En effet, cette condition est équivalente à (vérifier !)

$$\ell \leqslant \frac{-\theta + \pi}{2\pi} < \ell + 1,$$

c'est-à-dire que ℓ est la partie entière de $(-\theta + \pi)/(2\pi)$. Par périodicité, on a :

$$\begin{cases} \cos(\theta + 2\ell\pi) = \cos\theta = \mathrm{Re}\, z \\ \sin(\theta + 2\ell\pi) = \sin\theta = \mathrm{Im}\, z, \end{cases}$$

de sorte que $\theta + 2\ell\pi$ est l'unique solution de ce système qui appartient à $\left]-\pi, \pi\right]$. On a donc : $\theta + 2\ell\pi = \arg(z)$.
Si on applique ce raisonnement au θ_1 de l'énoncé, on trouve m entier tel que $\theta_1 + 2m\pi = \arg(z)$. On a donc : $\theta = \theta_1 + 2k\pi$ pour $k = m - \ell$.
Inversement, la périodicité du cosinus et du sinus assure que si θ_1 est un argument de z, alors $\theta_1 + 2k\pi$ en est un aussi pour tout entier k.

b) Exponentielle complexe

Notation. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Définition. On appelle *exponentielle complexe* l'application $\mathbf{e} : \mathbb{R} \to \mathbb{U}$, $\theta \mapsto e^{i\theta}$ où, pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + \sin(\theta)i.$$

La proposition suivante est une reformulation de ce qui précède en termes d'exponentielle.

Proposition. (i) *Pour tout nombre complexe z de module* 1, *il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.*
(ii) *Pour tous θ et θ' réels, on a : $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + 2k\pi$.*

Remarque. La proposition entraîne que l'exponentielle complexe est surjective mais pas injective.

Démonstration. (i) Soit $z \in \mathbb{U}$ et soit θ un argument de z. On a par définition : $e^{i\theta} = z$.
(ii) Si $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$, alors θ et θ' sont deux arguments de $e^{i\theta}$, donc ils diffèrent d'un multiple de 2π par la proposition précédente.

Le résultat suivant est particulièrement utile et important.

Théorème. *Pour tous θ et θ' réels, on a :*

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} + e^{i\theta'}.$$

Démonstration. C'est une façon d'écrire les formules d'addition du cosinus et du sinus :

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\theta')} &= \cos(\theta+\theta') + \sin(\theta+\theta')i \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + (\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')i \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= e^{i\theta}e^{i\theta'}. \end{aligned}$$

Corollaire. *Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :*
(i) $\overline{e^{i\theta}} = \left(e^{i\theta}\right)^{-1} = e^{-i\theta}$ *;*
(ii) $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Démonstration. (i) On a par im-parité :

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}.$$

D'autre part, on a : $e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^{0i} = 1$ donc $e^{-i\theta}$ est l'inverse de $e^{i\theta}$.
(ii) On procède comme pour montrer que $|z^n| = |z|^n$ pour $z \neq 0$. Laissé en exercice.

c) Lignes trigonométriques remarquables

On a déjà vu les résultats suivants :

$$e^{i0} = 1, \quad e^{i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i, \quad e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \quad e^{-i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i.$$

Lemme (Formules de duplication)**.** *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta. \end{cases}$$

Démonstration. On le tire de :

$$\cos 2\theta + i\sin 2\theta = e^{2i\theta} = e^{i\theta}e^{i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + i2\sin\theta\cos\theta,$$

puis on remplace $\cos^2\theta$ par $1 - \sin^2\theta$ ou l'inverse. Bien sûr, on aurait pu appliquer directement les formules d'addition...

Comme application, retrouvons les lignes trigonométriques de $\pi/4$. On a : $\left(e^{\imath\pi/4}\right)^2 = e^{i\pi/2} = i$. Soit $c = \cos(\pi/4)$: c'est un réel positif car $\pi/4$ est compris entre 0 et $\pi/2$. On a : $2c^2 - 1 = 0$ donc $c = \sqrt{2}/2$. Quant à $s = \sin\pi/4$, il est aussi positif et on a : $1 - 2s^2 = 0$ donc $s = c$. On aurait pu aussi chercher les racines carrées de i sous forme trigonométrique. Au bilan :

$$e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Exercice. (i) Trouver les parties réelle et imaginaire de $j = e^{i2\pi/3}$ et $e^{i4\pi/3}$. On pourra remarquer que $j^3 = 1$ et factoriser $j^3 - 1 = j^3 - 1^3$.
(ii) Trouver les parties réelle et imaginaire de $e^{i\pi/3}$ et $e^{i\pi/6}$. On pourra remarquer que l'on a $\pi/3 = -\pi + 4\pi/3$ et $\pi/6 = \pi/2 - \pi/3$ et utiliser les formules d'addition.
(iii) Trouver les parties réelle et imaginaire de $e^{i\pi/12}$. On pourra utiliser : $\pi/12 = \pi/3 - \pi/4$.

d) Formules de Moivre, linéarisation

Rapprochons les formules $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $\mathrm{Re}(z) = (z+\overline{z})/2$, $\mathrm{Im}(z) = (z-\overline{z})/2i$. Il vient :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

C'est utile pour « linéariser » des expressions polynomiales en cosinus et sinus. Par exemple :

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}}{8} = \frac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4},$$
$$\sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = -\frac{e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}}{8i} = -\frac{\sin 3\theta - 3\sin\theta}{4},$$

Ce type de transformation permet de trouver des primitives de polynômes trigonométriques. On peut faire l'inverse également. Exprimons par exemple $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ comme des polynômes en $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i\sin 3\theta = e^{i3\theta} &= \left(e^{i\theta}\right)^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + i(3\sin\theta - 4\sin^3\theta),\end{aligned}$$

où on passe à la dernière ligne grâce à $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

3° Arguments d'un complexe non nul

a) Passer d'un complexe de module 1 à un complexe non nul repose sur un fait très simple.

Lemme. *Soit z un complexe non nul. Alors, $\dfrac{z}{|z|}$ est de module 1.*

Démonstration. On a : $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = \dfrac{|z|}{\big||z|\big|} = \dfrac{|z|}{|z|} = 1$.

Définition. Soit z un complexe non nul. On appelle *argument* de z tout argument de $z/|z|$. On appelle *argument principal* de z l'argument principal de $z/|z|$.
Autrement dit, un argument de z est n'importe quel réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$, l'argument principal est l'unique $\theta\in\,]-\pi,\pi]$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$.

Mise en garde. *Comme Chuck Norris ne sait pas diviser par zéro, il ne sait pas calculer $z/|z|$ et ne peut donc pas trouver un argument pour* 0.

On reformule ce que l'on a déjà dit.

Lemme. *Soit z un complexe non nul et soit θ un argument de z. Les arguments de z sont les réels de la forme $\theta + 2k\pi$ pour k entier quelconque.*

Exemple. Soit z un complexe. On a les équivalences :
- le complexe z est réel strictement positif SSI l'argument de z vaut 0 à 2π près ;
- le complexe z est réel strictement négatif SSI l'argument de z vaut π à 2π près ;
- le complexe z est réel non nul SSI l'argument de z vaut 0 à π près ;
- le complexe z est imaginaire pur non nul SSI l'argument de z vaut $\pi/2$ à π près.

Proposition. *Soient z et z' deux complexes non nuls. Alors :*

$$\exists k\in\mathbb{Z},\quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi.$$

Mise en garde. *La précision « à 2π près » est indispensable. Prenons en effet $z = z' = -i$. On a :* $\arg(z) = -\frac{\pi}{2} = \arg(z')$ *alors que* $zz' = -1$ *et* $\arg(zz') = \pi \neq -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$.

b) Représentation géométrique

Une *représentation géométrique* d'un complexe z est un couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ tel que

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

On n'a guère le choix sur ρ et θ. En effet, ρ est nécessairement le module de z car : $|z| = |\rho e^{i\theta}| = |\rho|\,|e^{i\theta}| = \rho$. Conséquemment, si z n'est pas nul, θ est nécessairement un argument de z puisque $z = |z|e^{i\theta}$.

Lemme (Critère d'égalité pour deux formes géométriques)**.** *Soient ρ et ρ' deux réels strictement positifs et θ et θ' deux réels. Alors :*

$$\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'} \iff \begin{cases} \rho = \rho' \\ \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi. \end{cases}$$

Mise en garde. *Bien sûr, si $\rho = 0$, alors $\rho' = 0$ et on n'a plus aucune information sur θ et θ'.*

Démonstration. On l'a déjà fait : si on pose $z = \rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$, c'est un nombre complexe non nul et on a vu précédemment que nécessairement, on a : $\rho = |z| = \rho'$ et θ et θ' sont deux arguments de z, qui diffèrent donc d'un multiple de 2π. Réciproquement, si ces conditions sont remplies, la périodicité de sinus et cosinus assure que $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$.

Exemple. Soit α un réel, on cherche une représentation géométrique de $z = 1 + e^{i\alpha}$. L'astuce consiste à factoriser l'arc moitié $e^{i\alpha/2}$:

$$1 + e^{i\alpha} = e^{i\alpha/2}\big(e^{-i\alpha/2} + e^{i\alpha/2}\big) = e^{i\alpha/2} 2\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Ainsi, si $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$, on a : $|1 + e^{i\alpha}| = 2\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\alpha/2$ est un argument de $1 + e^{i\alpha}$; si $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$, on a : $|1 + e^{i\alpha}| = -2\cos\frac{\alpha}{2}$ et $\alpha/2 + \pi$ est un argument de $1 + e^{i\alpha}$.

Exercice. Avec la même idée de factoriser l'arc moitié, traiter $e^{i\alpha} + e^{i\beta}$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

V Racines

1° Racines carrées, version géométrique

Proposition. *Soit A un complexe non nul. On l'écrit sous forme géométrique : $A = re^{i\alpha}$ où $r = |A|$ et α est un argument de A. Alors, les deux racines carrées de A sont : $\sqrt{r}e^{i\alpha/2}$ et $-\sqrt{r}e^{i\alpha/2}$.*

Démonstration. On vérifie immédiatement : $\big(\sqrt{r}e^{i\alpha/2}\big)^2 = re^{i\alpha} = A$. Soit z un complexe, on a :

$$z^2 = A \ \Leftrightarrow\ z^2 - \big(\sqrt{r}e^{i\alpha/2}\big)^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ \big(z - \sqrt{r}e^{i\alpha/2}\big)\big(z + \sqrt{r}e^{i\alpha/2}\big) = 0,$$

ce qui permet de conclure.

2° Racines de l'unité

Définition. Soit n un entier naturel. On appelle *racine n-ième de l'unité* tout complexe z tel que $z^n = 1$. On note μ_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Proposition. *Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble μ_n possède n éléments :*

$$\mu_n = \big\{e^{i2k\pi/n},\ k \in \{0, \dots, n-1\}\big\}.$$

Remarque. Un intérêt des racines de l'unité, c'est de donner un contrôle algébrique sur les sommets d'un polygone régulier, c'est-à-dire de permettre de faire des calculs avec.

Démonstration. Soit z un élément de μ_n. Soient ρ réel positif et θ réel tels que $z = \rho e^{i\theta}$. La condition $z^n = 1$ s'écrit : $\rho^n e^{in\theta} = 1$. Elle équivaut à : $\rho^n = 1$ et $n\theta = k2\pi$ pour k entier convenable. Comme n est supérieur ou égal à 1, l'application $\rho \mapsto \rho^n$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. La condition $\rho^n = 1$ équivaut donc à $\rho = 1$. Ainsi, les éléments de μ_n sont les complexes de la forme $\zeta_k = e^{i2k\pi/n}$ avec k entier quelconque.
Il faut remarquer que si k et k' diffèrent d'un multiple de n, disons $k = k' + n\ell$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$, alors : $e^{i2k\pi/n} = e^{i2k'\pi/n + i\ell 2\pi} = e^{i2k'\pi/n}$. Par suite, $\zeta_k = \zeta_r$, où $r \in \{0, \dots, n-1\}$ est le reste de la division euclidienne[7] de k par n. Or, pour r et r' distincts dans $\{0, \dots, n-1\}$, il n'existe pas d'entier ℓ tel que $i2r\pi/n = i2r'\pi/n + 2\ell\pi/n$ (sinon, on aurait $0 < |r - r'| \leqslant \frac{\ell}{n} < 1$, absurbe). Ainsi, les éléments de μ_n sont les n éléments ζ_r, $r \in \{0, \dots, n-1\}$.

Remarque. Si on note $\zeta_k = e^{i2k\pi/n}$, alors on a : $\zeta_k = \zeta_1^k$. Ainsi, μ_n est l'ensemble des n puissances distinctes de ζ_1.

Corollaire. *Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. On a :* $\displaystyle\sum_{\zeta \in \mu_n} \zeta = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k = 0.$

Démonstration. On a en effet, comme $\zeta_1 \neq 1$ et $\zeta_1^n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_1^k = \frac{1 - \zeta_1^n}{1 - \zeta} = 0.$$

3° Racines d'un complexe quelconque

Définition. Soit n un entier naturel et A un complexe. On appelle *racine n-ième de A* tout complexe z tel que $z^n = A$.

Proposition. *Soit n un entier naturel non nul et A un complexe non nul, disons $A = re^{i\alpha}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. L'ensemble des racines n-ièmes de A contient n éléments :*

$$\left\{r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n} + i\frac{2k\pi}{n}},\ k \in \{0, \dots, n-1\}\right\} = \left\{r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n}} \zeta_k,\ k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}.$$

Démonstration. Soit $z_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha}{n}}$. On a facilement : $z_0^n = re^{i\alpha} = A$. Mais alors, comme A n'est pas nul, z_0 non plus et on a, pour tout complexe z :

$$z^n = A \ \Leftrightarrow\ z^n = z_0^n \ \Leftrightarrow\ \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{z}{z_0} \in \mu_n \ \Leftrightarrow\ \exists k \in \{0, \dots, n-1\},\ \frac{z}{z_0} = \zeta_k.$$

7. Rappelons que pour tout couple (k, n) d'entiers, avec $n \neq 0$, il existe un unique couple « quotient-reste » (q, r) tel que $k = qn + r$ et $0 \leqslant r < |n|$. Si $n > 0$, q est la partie entière de k/n et $r = k - n\lfloor \frac{k}{n} \rfloor$.