**Session 2 - Examen final du 26 juin 2024**

*Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.*

*Les 4 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.*

**Exercice 1.** Soit $a$ un réel différent de $-1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & a \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $D_n = \det(A_n)$ son déterminant.

1. Calculer $D_1, D_2$ et $D_3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $b \in \mathbb{R}$ (dépendant de $a$) tel que $D_{n+1} = -bD_n + b$.
3. On pose $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = -b\ell + b$, étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = D_n - \ell$ et en déduire une expression explicite de $D_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a$ et $n$ pour que la matrice $A_n$ soit inversible.

**Exercice 2.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de $A$.
2. Pour chaque valeur propre de $A$, déterminer le sous-espace propre associé.
3. Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -x(t) + y(t) + 3z(t) \end{cases}$$

   d'inconnues $x, y, z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables.

**Exercice 3.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $f$ un endomorphisme de $E$ non nul. On suppose que le polynôme $P = X^2(X^2+1)$ est annulateur de $f$.

1. Donner tous les diviseurs de $P$ de degré au moins 1 dans $\mathbb{R}[X]$ (il y en a cinq en tout).
2. Parmi ces cinq polynômes, justifier que ceux qui sont de degré 1 et 4 ne peuvent pas être le polynôme minimal de $f$.
3. Parmi les trois restants, justifier que l'un d'entre eux ne peut être le polynôme minimal en utilisant le fait que la dimension de $E$ est 3.

4. On se place dans le cas où $m_f = X^2$.
   (a) Justifier que la dimension de $\ker(f)$ est 1 ou 2.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subseteq \ker(f)$. En déduire que le noyau est de dimension 2.
   (c) Justifier qu'il existe $x_1$ élément non nul de $\mathrm{Im}(f)$.
   (d) On considère un antécèdent de $x_1$ par $f$ qu'on note $x_2$. Pour finir, soit $x_3$ un élément non nul de $\ker(f)$ non colinéaire à $x_1$. Justifier qu'un tel $x_3$ existe.
   (e) Montrer que $(x_1, x_2, x_3)$ est une base de $E$.
   (f) Donner la matrice de $f$ dans cette base.
5. On se place dans le cas où $m_f = X(X^2 + 1)$.
   (a) Montrer que $E = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + \mathrm{Id})$.
   (b) Montrer $\ker(f^2 + \mathrm{Id})$ est stable par $f$ et est de dimension $\geq 1$.
   (c) Soit $x_2$ non nul dans $\ker(f^2 + \mathrm{Id})$ et soit $x_3 = f(x_2)$. Montrer que la famille $(x_2, x_3)$ est libre.
   (d) Soit alors $x_1$ un élément non nul de $\ker(f)$. Justifier que la famille $(x_1, x_2, x_3)$ est une base de $E$.
   (e) Donner la matrice de $f$ dans cette base.

## Correction de l'examen de session 2 d'algèbre 3 du 26 juin 2024

### Correction de l'exercice 1

1. En effectuant par exemple l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ dans $D_3$ et en développant par rapport à $L_1$, on trouve

$$D_1 = \det(0) = 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & a \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = a, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ -1 & -a & a \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a(1-a).$$

2. En effectuant l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$ puis en développant par rapport à $C_1$,

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} -a & a & \dots & \dots & a \\ -1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n+1]} = -a \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a & \dots & a \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}}_{=D_n} -(-1) \begin{vmatrix} a & a & \dots & a \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Dans le dernier déterminant, en factorisant par $a$ la ligne $L_1$ par multilinéarité du déterminant, puis en additionnant $L_1$ à toutes les autres lignes, on obtient finalement

$$D_{n+1} = -aD_n + a \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 0 & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ -1 & \dots & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{[n]} = -aD_n + a \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a & \dots & 1+a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1+a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{[n]} = -aD_n + a$$

puisque le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est le produit de ses termes diagonaux. Le réel $b = a$ répond donc à la question posée.

3. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ satisfaisant $\ell = -a\ell + a$ ce qui équivaut (puisque $a \neq -1$) à $\ell = \dfrac{a}{1+a}$, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = D_{n+1} - \frac{a}{1+a} = -aD_n + a - \frac{a}{1+a} = -a\left(D_n - 1 + \frac{1}{1+a}\right) = -a\left(D_n - \frac{a}{1+a}\right) = -au_n$$

donc la suite $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison $-a$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-a)^{n-1}u_1$, ce qui implique

$$D_n = u_n + \frac{a}{1+a} = (-a)^{n-1}\left(D_1 - \frac{a}{1+a}\right) + \frac{a}{1+a} = \frac{a}{1+a}(1 - (-a)^{n-1})$$

4. La matrice $A_n$ est inversible si, et seulement si, $D_n = \det(A_n) \neq 0$. Or

$$D_n = 0 \iff \frac{a}{1+a}(1 - (-a)^{n-1}) \iff a = 0 \text{ ou } 1 - (-a)^{n-1} = 0$$

et

$$(-a)^{n-1} = 1 \iff (n \text{ est pair et } a = -1) \text{ ou } (n \text{ est impair et } a \in \{-1; 1\})$$

Puisque l'énoncé fixe $a \neq -1$, on en déduit que la matrice $A_n$ est inversible si, et seulement si, $a \neq 0$ et ($n$ pair ou $a \neq 1$).

### Correction de l'exercice 3

1. Les diviseurs de degré $\geq 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ sont : $X,\ X^2,\ X^2+1,\ X(X^2+1),\ X^2(X^2+1)$.

2. Si $m_f = X$ cela signifierait $f = 0$ ce qui est contraire à l'énoncé. De plus $E$ est de dimension 3 donc le polynôme caractéristique $\chi_f$ de $f$ est de degré 3 et on sait que le polynôme minimal de $f$ divise $\chi_f$ donc $m_f$ ne peut pas être de degré 4.

3. Ici $E$ est dimension impaire. Par conséquent le polynôme caractéristique admet forcément une racine réelle (par le théorème des valeurs intermédiaires). Par l'absurde supposons que $m_f = X^2 + 1$. Alors $\chi_f = (X^2 + 1)(X - \alpha)$ pour un certain réel $\alpha$. Le polynôme caractéristique serait scindé sur $\mathbb{C}$ avec les valeurs propres $i$, $-i$ et $\alpha$ et $m_f$ doit avoir les mêmes racines d'où l'absurdité.

4. (a) Puisque 0 est une racine de $m_f$ cela signifie que 0 est une valeur propre donc $E_0 = \ker(f)$ n'est pas de dimension 0. De plus, il ne peut pas être de dimension 3 car cela impliquerait que $f = 0$. Sa dimension ne peut être que 1 ou 2.

   (b) Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $z \in E$ tel $f(z) = y$. Par suite, $0 = f(f(z)) = f(y) = 0$ donc $y \in \ker(f)$ d'où l'inclusion demandée. Le théorème du rang nous dit que $\mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)) = 3$. Si le noyau était de dimension 1, l'inclusion précédente impliquerait que $\mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(f)) \leq 2$ ce qui serait absurde. La dimension du noyau est donc 2.

   (c) Toujours par le théorème du rang, le rang de $f$ est forcément égal à 1 par la question précédente donc $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$.

   (d) On a $x_1 \in \mathrm{Im}(f) \subseteq \ker(f)$ et $\ker(f)$ est de dimension 2 donc il existe $x_3$ non colinéaire à $x_1$ dans $\ker(f)$.

   (e) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$. On applique $f$ et on obtient $\lambda_2 x_1 = 0$ (car $x_1, x_3 \in \ker(f)$). Puisque $x_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. Par conséquent on obtient $\lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3$. Notons que $x_1$ et $x_3$ sont non nuls et que $x_3$ est non colinéaire à $x_1$ ce qui entraine $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. La famille est donc libre. Comme $E$ est de dimension 3, la famille des $x_i$ en forme donc une base.

   (f) On a $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = x_1$ et $f(x_3) = 0$ ce qui donne la matrice suivante dans la base des $x_i$ : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. (a) On applique le lemme des noyaux à $m_f$.

   (b) $f$ et $f^2 + \mathrm{Id}$ commutent ce qui implque que le noyau de $f^2 + \mathrm{Id}$ est stable par $f$. Si la dimension de ce noyaux était nul alors la dimension de $\ker(f)$ serait égale à 3 et $f$ serait nul.

   (c) Soient $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$. On applique $f$ et on obtient $\lambda_2 x_3 - \lambda_3 x_2 = 0$ car $f(x_2) = x_3$ et $f(x_3) = f(f(x_2)) = -x_2$ la dernière égalité venant du fait $x_2 \in \ker(f^2 + \mathrm{Id})$. On multiplie la 1ere égalité par $\lambda_2$ et la 2ème par $\lambda_3$ et on les retranche ce qui donne $(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)x_2 = 0$. Comme $x_2 \neq 0$, on obtient $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

   (d) La stabilité de $\ker(f^2 + \mathrm{Id})$ et la question précédente implique que $(x_2, x_3)$ est une famille libre de $\ker(f^2 + \mathrm{Id})$. La question 5(a) entraine alors que la famille $(x_1, x_2, x_3)$ est libre. C'est donc une base de $E$ car ce dernier est de dimension 3.

   (e) On a $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = x_3$ et $f(x_3) = f(f(x_2)) = -x_2$. La matrice de $f$ dans cette base est donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.