Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2023-2024

Algèbre 3 Durée : 2 heures

Examen final du 9 janvier 2024

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.Les 4 exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Le barème sera sur environ 26 points pour accorder 6 points Bonus.

Exercice 1. Soit $n \geq 2$. On considère la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de $A_n + I_n$ et en déduire le spectre (réel) de A_n.
2. Montrer que la matrice A_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer le polynôme minimal de A_n.
4. Exprimer A_n^p pour tout $p \in \mathbb{N}$ en fonction de A_n et de I_n.
5. En déduire, pour $t \in \mathbb{R}$, une expression de e^{tA_n} en fonction de A_n et I_n.
6. On s'intéresse au système différentiel

$$(S) : \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$$

d'inconnues $x, y, z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables.

   (a) Soient $x, y, z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables. Montrer que x, y et z sont solutions de (S) si, et seulement si, X est solution de $(S') : \quad \forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = BX(t)$, où X et B sont à préciser.

   (b) En remarquant que B s'écrit en fonction de A_3, déterminer l'ensemble des solutions x, y et z de (S) satisfaisant les conditions $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ et $z(0) = 0$.

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E vérifiant

$$f^3 + f^2 + f = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

1. Montrer que le spectre de f est inclus dans un singleton.
2. Montrer que f possède au moins une valeur propre, en déduire le spectre de f.
3. Déterminer le polynôme minimal de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? trigonalisable ?
4. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$.
5. On note $H = \mathrm{Ker}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. Montrer que H est stable par f et en déduire que $\dim(H) \neq 1$.
6. Déterminer la dimension de H.
7. Soit $b \in H$ non nul. Montrer que $(b, f(b))$ est une base de H.
8. Déduire des questions précédentes l'existence d'une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit $b \in \mathbb{R}$. On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1-b & -1+b & 1-2b \\ b & -2-b & 1+2b \\ b & -b & -1+2b \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le polynôme caractéristique de A est de la forme $\chi_A = (X+2)(X+a)^2$ où $a \in \mathbb{R}$ est à déterminer.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur b pour que la matrice A soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. **Dans toute la suite de l'exercice**, on supposera désormais que $b = 1$. Justifier que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et trigonaliser A sous la forme d'une matrice diagonale par blocs, en précisant la matrice de passage P et le lien entre A et la matrice triangulaire T obtenue.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire une expression de A^n en fonction de n, P et P^{-1}.
5. Résoudre le système

$$(S): \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = -2x_n - z_n \\ y_{n+1} = x_n - 3y_n + 3z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n + z_n \end{array} \right.$$

d'inconnues $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $B = ((-1)^{i+j}a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. À l'aide de la définition du déterminant utilisant les permutations, exprimer le déterminant de B en fonction de celui de A.

Correction de l'examen final (session 1) d'algèbre 3 de 2023-2024

Correction de l'exercice 1

1. La matrice $A_n + I_n$ est la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1, donc $\mathrm{rang}(A_n + I_n) = 1$ (toutes les colonnes sont égales à la première qui n'est pas nulle). Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim \mathrm{Ker}(A_n + I_n) = n - 1 \neq 0$, ce qui démontre que -1 est valeur propre de A_n, de multiplicité algébrique supérieure ou égale à $\dim(\mathrm{Ker}(A_n + I_n)) = n - 1$. Par conséquent, le polynôme caractéristique de A_n est divisible par $(X + 1)^{n-1}$. Comme il est de plus unitaire et de degré n, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_{A_n} = (X+1)^{n-1}(X - \lambda)$. Ainsi, χ_{A_n} est scindé sur $\mathbb{R}$, donc la somme des valeurs propres de A_n comptées avec multiplicités algébriques est égale à la trace de A_n ce qui entraîne
$$(n-1)(-1) + \lambda = \mathrm{Tr}(A_n) = 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda = n - 1.$$
Ceci démontre que le spectre de A_n est $\{-1; n-1\}$.

2. On vient de voir que $\mathrm{Sp}(A_n) = \{-1; n-1\}$ avec $n - 1$ de multiplicité algébrique égale à 1. Comme $1 \leq \dim \mathrm{Ker}(A_n - (n-1)I_n) \leq 1$, il vient $\dim \mathrm{Ker}(A_n - (n-1)I_n) = 1$, donc
$$\sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(A_n)} \dim \mathrm{Ker}(A_n - \mu I_n) = \dim \mathrm{Ker}(A_n + I_n) + \dim \mathrm{Ker}(A_n - (n-1)I_n) = n - 1 + 1 = n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$
ce qui permet de conclure que A_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. La matrice A_n est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc son polynôme minimal π_{A_n} est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. De plus, celui-ci est unitaire et possède exactement les mêmes racines que χ_{A_n}, d'où $\pi_{A_n} = (X+1)(X - (n-1))$.

4. Soit $p \in \mathbb{N}$. On effectue la division euclidienne de X^p par π_{A_n} : il existe $(Q_p, R_p) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que
$$(*) \quad X^p = \pi_{A_n} \times Q_p + R_p \quad \text{avec} \quad \det(R_p) < \deg(\pi_{A_n}) = 2.$$
Ainsi, il existe $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{R}$ vérifiant $R_p = \alpha_p + \beta_p X$. En évaluant $(*)$ respectivement en -1 et $n - 1$ qui sont les racines de π_{A_n}, on obtient :
$$\left\{\begin{array}{l} (-1)^p = \alpha_p - \beta_p \\ (n-1)^p = \alpha_p + (n-1)\beta_p \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \alpha_p - \beta_p = (-1)^p \\ n\beta_p = (n-1)^p - (-1)^p \end{array}\right. \text{ en ayant effectué } L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} \alpha_p = \dfrac{1}{n}\left((n-1)^p + (n-1)(-1)^p\right) \\ \beta_p = \dfrac{1}{n}\left((n-1)^p - (-1)^p\right) \end{array}\right.$$
En évaluant $(*)$ en A_n, on trouve finalement, puisque π_{A_n} est annulateur de A_n :
$$\begin{aligned} A_n^P = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + R_p(A) &= \frac{1}{n}\left((n-1)^p + (n-1)(-1)^p\right) I_n + \frac{1}{n}\left((n-1)^p - (-1)^p\right) A_n \\ &= \frac{1}{n}\left((n-1)^p (I_n + A_n) + (-1)^p((n-1)I_n - A_n)\right) \end{aligned}$$

5. Soit $t \in \mathbb{R}$, par définition de l'exponentielle d'une matrice,
$$\begin{aligned} e^{tA_n} &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(tA_n)^p}{p!} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{p!} \frac{1}{n}\left((n-1)^p(I_n + A_n) + (-1)^p((n-1)I_n - A_n)\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p(n-1)^p}{p!}\right)(I_n + A_n) + \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p t^p}{p!}\right)((n-1)I_n - A_n)\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(e^{(n-1)t}(I_n + A_n) + e^{-t}((n-1)I_n - A_n)\right). \end{aligned}$$

6. (a) Posons $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'application définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Comme x, y et z sont dérivables sur $\mathbb{R}$, il en est de même de X et sa dérivée s'obtient en dérivant composante par composante. Ainsi,

$$\begin{aligned} x, y \text{ et } z \text{ sont solutions de } (S) \quad &\iff \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x(t)+y(t)+z(t) \\ x(t)+y(t)+z(t) \\ x(t)+y(t)+z(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = BX(t) \text{ où } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Par le cours sur les systèmes différentiels, on obtient ainsi

$$x, y \text{ et } z \text{ sont solutions de } (S) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = e^{tB}X(0).$$

Or $B = I_3 + A_3$ et $I_3A_3 = A_3 = A_3I_3$, d'où

$$e^{tB} = e^{tI_3}e^{tA_3} = e^t I_3 e^{tA_3} = \frac{1}{3}\left(e^{3t}(I_3 + A_3) + (2I_3 - A_3)\right)$$

Finalement, x, y et z sont solutions de (S) avec les conditions initiales $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ et $z(0) = 0$ si, et seulement si,

$$\begin{aligned} &\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \frac{1}{3}\left(e^{3t}(I_3 + A_3) + (2I_3 - A_3)\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff \quad &\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} * & e^{3t}-1 & * \\ * & e^{3t}+2 & * \\ * & e^{3t}-1 & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \iff \quad &\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}(e^{3t}-1) \\ y(t) = \frac{1}{3}(e^{3t}+2) \\ z(t) = \frac{1}{3}(e^{3t}-1) \end{cases} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2

1. Par l'identité vérifiée par f, le polynôme $P = X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1)$ est annulateur de f. Ainsi, le spectre de f, nécessairement réel car f est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, est inclus dans l'ensemble des racines (réelles) de P. Comme le discriminant du polynôme $X^2 + X + 1$ vaut $-3 < 0$, $X^2 + X + 1$ ne possède aucune racine réelle, donc P admet pour unique racine 0. Ainsi, $\mathrm{Sp}(f) \subset \{0\}$.

2. Les valeurs propres de f sont exactement les racines réelles du polynôme caractéristique χ_f de f. Comme f est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E avec $\dim(E) = 3$, χ_f est un polynôme unitaire réel de degré 3. Il admet donc nécessairement une racine réelle. En effet, sa fonction polynômiale associée est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\lim\limits_{x\to-\infty} \chi_f(x) = -\infty < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \chi_f(x) = +\infty > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires justifie donc l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_f(\lambda) = 0$. Ainsi, f admet au moins une valeur propre, donc $\mathrm{Sp}(f) \neq \emptyset$, ce qui entraîne par la question précédente $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

3. Le polynôme minimal de f, noté π_f, divise tout polynôme annulateur de f, donc il divise P. De plus, il est unitaire et l'ensemble de ses racines correspond au spectre de f. Puisque P est décomposé en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, on en déduit que $\pi_f = X$ ou $X(X^2+X+1) = P$. Or $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc X n'est pas annulateur de f. Ainsi, on obtient $\pi_f \neq X$ d'où $\pi_f = P$. Le polynôme minimal de f n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc f n'est ni diagonalisable ni trigonalisable.
4. Puisque les polynômes X et X^2+X+1 sont premiers entre eux, le lemme des noyaux entraîne $\mathrm{Ker}(\pi_f(f)) = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. De plus, $\pi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, d'où $\mathrm{Ker}(\pi_f(f)) = \mathrm{Ker}(0_{\mathcal{L}(E)}) = E$, ce qui donne l'égalité demandée.
5. On peut utiliser le cours et expliquer que puisque f commute avec $f^2+f+\mathrm{Id}_E$, $H = \mathrm{Ker}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$ est stable par f, ou le démontrer directement : soit $x \in H$, alors

$$(f^2+f+\mathrm{Id}_E)(f(x)) = (f^3+f^2+f)(x) = f\left((f^2+f+\mathrm{Id}_E)(x)\right) = f(0_E) = 0_E$$

   donc $f(x) \in H$. Ainsi, $f(H) \subset H$ ce qui démontre que H est stable par f.

   Supposons par l'absurde que $\dim(H) = 1$, alors il existe $a \in E\backslash\{0_E\}$ tel que $H = \mathrm{Vect}(a)$. Comme H est stable par f, $f(a) \in H$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = \lambda a$. Puisque $a \neq 0_E$, ceci entraîne que $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ et ainsi $\lambda = 0$ d'où $a \in \mathrm{Ker}(f)$, ce qui est contradictoire puisque $H \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. On a donc bien $\dim(H) \neq 1$.
6. Puisque H est un sous-espace vectoriel de E, $\dim(H) \leq 3$. On ne peut pas avoir$\dim(H) = 0$, sinon par l'égalité $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus H$, on aurait $\mathrm{Ker}(f) = E$ ce qui contredirait $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. De même, on ne peut pas avoir $\dim(H) = 3$, sinon $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ ce qui contredit le fait que 0 soit valeur propre de f. Par conséquent, la seule possibilité est $\dim(H) = 2$.
7. Remarquons qu'un tel b existe bien puisque $\dim(H) = 2$. Tout d'abord, puisque H est stable par f, la famille $(b, f(b))$ est une famille d'éléments de H. Comme son cardinal vaut $2 = \dim(H)$, il suffit de montrer qu'elle est libre pour prouver qu'il s'agit d'une base de H. Si la famille était liée, comme $b \neq 0_E$, il existerait $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) = \mu b$. Le caractère non nul de b impliquerait alors que $\mu \in \mathrm{Sp}(f) = \{0\}$ d'où $b \in \mathrm{Ker}(f)$ ce qui contredirait le fait que $\mathrm{Ker}(f)$ et H sont en somme directe. Ainsi, $(b, f(b))$ est une base de H.
8. Comme $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(H)$, on sait que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 1. Soit $a \in \mathrm{Ker}(f)$, $a \neq 0_E$, alors (a) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$. La famille $\mathcal{B} = (a, b, f(b))$ est une base de E, adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus H$, car obtenue par concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ avec une base de H. Par construction, $f(a) = 0_E$, $f(b) = f(b)$ et $f^2(b) = -f(b) - b$ car $(f^2+f+\mathrm{Id}_E)(b) = 0_E$. Ainsi, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 3

1. En effectuant successivement les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, le polynôme caractéristique de A vaut

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X+1+b & 1-b & -1+2b \\ -b & X+2+b & -1-2b \\ -b & b & X+1-2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+2 & 1-b & -1+2b \\ X+2 & X+2+b & -1-2b \\ 0 & b & X+1-2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+2 & 1-b & -1+2b \\ 0 & X+1+2b & -4b \\ 0 & b & X+1-2b \end{vmatrix}$$

   Il vient alors en développant par rapport à la première colonne

$$\chi_A = (X+2)\begin{vmatrix} X+1+2b & -4b \\ b & X+1-2b \end{vmatrix} = (X+2)\left((X+1+2b)(X+1-2b)+4b^2\right) = (X+2)(X+1)^2.$$

2. Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-2; -1\}$, avec -2 de multiplicité algébrique $m_{-2} = 1$ et -1 de multiplicité algébrique $m_{-1} = 2$. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, notons $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$ l'espace propre associé. Comme $1 \leq \dim E_{-2}(A) \leq m_{-2} = 1$, on dispose de l'égalité $\dim E_{-2}(A) = m_{-2}$, donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\dim E_{-1}(A) = m_{-1}$. Déterminons donc la dimension de $E_{-1}(A)$: en effectuant $C_3 \leftarrow C_3 + C_2 - C_1$ puis $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$, on trouve

$$\mathrm{rang}(A + I_3) = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} -b & -1+b & 1-2b \\ b & -1-b & 1+2b \\ b & -b & 2b \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} -b & -1 & 0 \\ b & -1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \text{ si } b \neq 0 \text{ (car } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont échelonnées)} \\ 1 \text{ si } b = 0 \end{cases}$$

Par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(A + I_3) = 3 - \mathrm{rang}(A + I_3)$. Ainsi, si $b \neq 0$, alors $\dim E_{-1}(A) = 1 \neq m_{-1}$ donc A n'est pas diagonalisable, et si $b = 0$, $\dim E_{-1}(A) = 2 = m_{-1}$ et A est diagonalisable. Finalement, on a démontré que A est diagonalisable si, et seulement si, $b = 0$.

3. Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Par le lemme des noyaux appliqué aux polynômes $X + 2$ et $(X + 1)^2$ qui sont premiers entre eux, $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E_{-2}(A) \oplus \mathrm{Ker}((A + I_3)^2)$. Cherchons une base de chacun de ces deux sous-espaces. On a vu que $\dim E_{-2}(A) = 1$ et on peut remarquer que

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de $E_{-2}(A)$, il en forme donc une base. De même, comme $b \neq 0$, $E_{-1}(A)$ est de dimension 1, et

$$(A + I_3)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $e_7 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une base de $E_{-1}(A) \subset \mathrm{Ker}((A+I_3)^2)$. On cherche une base de ce dernier sous-espace de premier vecteur e_2. Commençons par calculer

$$(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui entraîne

$$\mathrm{Ker}((A + I_3)^2) = \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A + I_3)^2 X = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y - z = 0\right\} = \mathrm{Vect}\{e_2, e_3\} \text{ où } e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec e_2 et e_3 non colinéaires, donc (e_2, e_3) est une base de $\mathrm{Ker}((A + I_3)^2)$. Par concaténation, la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Si on note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$, alors par formule de changement de bases

$$A = PTP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

car $Ae_1 = -2e_1$, $Ae_2 = -e_2$ et $A.e_3 = {}^t\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = e_2 - e_3$.

4. Par récurrence immédiate, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$. Il nous reste donc à calculer les puissances de T. On peut écrire T sous la forme

$$T = D + N \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $N^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$, d'où $N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ pour tout $k \geq 2$. Comme de plus $DN = ND$ (par calcul par blocs par exemple), on peut utiliser la formule du binôme de Newton : pour tout $n \geq 1$

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} T^k = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} T^k = D^n + nD^{n-1}T = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

On remarque que cette formule est encore vraie pour $n = 0$ car $T^0 = I_3$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

5. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{array}{ll}
 & (x_n)_n, (y_n)_n \text{ et } (z_n)_n \text{ sont solutions de } (S) \\
\iff & \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \begin{pmatrix} -2x_n - z_n \\ x_n - 3y_n + 3z_n \\ x_n - y_n + z_n \end{pmatrix} \\
\iff & \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n \\
\iff & \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0 \\
\iff & \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0 \\
\iff & \exists Y_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} (-2)^n & (-1)^{n+1} & (n+1)(-1)^n \\ (-2)^n & (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n & n(-1)^{n-1} \end{pmatrix} Y_0 \text{ en posant } Y_0 = P^{-1}X_0 \\
\iff & \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x_n = \alpha(-2)^n + \beta(-1)^{n+1} + \gamma(n+1)(-1)^n \\ y_n = \alpha(-2)^n + \beta(-1)^n + \gamma n(-1)^{n-1} \\ z_n = \beta(-1)^n + \gamma n(-1)^{n-1} \end{array} \right.
\end{array}$$

Correction de l'exercice 4 Notons $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1;n]\!]$ et pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $b_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de B, alors par définition du déterminant :

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} b_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma(i)+i} a_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (-1)^{\sigma(i)} \prod_{i=1}^{n} (-1)^i \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}
\end{aligned}$$

Or σ est une permutation de $[\![1;n]\!]$, donc $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(-1)^{\sigma(i)} = \prod_{i=1}^{n}(-1)^i$ ce qui entraîne

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left((-1)^2\right)^i \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \\
&= \det(A).
\end{aligned}$$