Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2024-2025

Algèbre 3 — Durée : 1 heure 30

Session 2 - Examen final du 24 juin 2025

Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones ou montres connectées est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Exercice 1. L'assertion suivante est-elle vraie ou fausse ? on donnera une démonstration si elle est vraie et un contre-exemple si elle est fausse : une matrice réelle nilpotente non nulle de taille 5 n'est jamais diagonalisable.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

1. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Si oui, donner (en justifiant rigoureusement) une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$.
2. Résoudre le système récurrent suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n - 2z_n \\ z_{n+1} = 2x_n - 2y_n + z_n \end{cases}$$

avec la condition initiale : $(x_1, y_1, z_1) = (1, 3, -2)$.

Exercice 3. Dans cet exercice, les trois questions peuvent se traiter indépendamment.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit u un endomorphisme de E et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non-constant.

1. Montrer que $\ker(P(u))$ est stable par u.
2. On suppose ici que $P = QR$ où Q et R sont deux polynômes premiers entre eux et que P est annulateur de u. À l'aide du lemme des noyaux et du théorème du rang, montrer que $\mathrm{Im}(Q(u)) = \ker(R(u))$.
3. Dans cette question, on fixe $n = 3$ et $P = (X-1)^2(X-2)$. Notons Γ l'ensemble des endomorphismes v de E tels que $P(v) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\mathrm{Card}(\mathrm{Spec}(v)) = 2$.
   (a) On suppose que la matrice de u dans une certaine base est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. L'endomorphisme u appartient-t-il à Γ ?
   (b) Déterminer l'ensemble des couples (π_v, χ_v) pour $v \in \Gamma$. Pour chaque couple trouvé, on demande d'exhiber une matrice triangulaire de v dans une base.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. L'objectif de cet exercice est de calculer le déterminant de la matrice circulante $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ où

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

1. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 4$ et $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 1, 2)$. Déterminer le déterminant de $C(a_0, a_1, a_2, a_3)$. Cette matrice est-elle inversible ?
2. On considère le polynôme $P = \det(C(X, a_1, \dots, a_{n-1}))$. Pour $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$, on note $c_{i,j} \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme correspondant au coefficient d'indice (i, j) de la matrice $C(X, a_1, \dots, a_{n-1})$.
   (a) À l'aide de la définition du déterminant, écrire P à l'aide de permutations et des polynômes $c_{i,j}$.
   (b) En déduire que P est un polynôme de degré n et préciser son coefficient dominant.
3. Pour $k \in [\![0; n-1]\!]$, on note $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.
   (a) Calculer ω_k^n.
   (b) Montrer que $c_k = -\sum_{j=1}^{n-1} a_j \omega_k^j$ est racine de P.
4. On suppose que les complexes c_k sont deux à deux distincts. Donner la forme factorisée de P dans $\mathbb{C}[X]$ et en déduire $\det(C(a_0, \dots, a_{n-1}))$.

Correction de l'examen de session 2 d'algèbre 3 du 24 juin 2025

Correction de l'exercice 1 VRAIE : si $M \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ est nilpotente non nulle, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0_{\mathcal{M}_5(\mathbb{R})}$. Ainsi, π_M est de la forme X^k avec $1 \leq k \leq p$. Or X n'est pas annulateur de M, sinon M serait nulle, donc π_M n'est pas scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, et ainsi M n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 2 Le spectre est $\{-1,\ 3\}$ et 3 est une valeur propre double et A est diagonalisable car les espaces propres sont donnés par

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \quad \text{et} \quad E_3(A) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Soient $(x_n)_n, (y_n)_n$ et $(z_n)_n$ trois suites complexes. Si l'on pose $X_n = \begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}(x_n)_n,\ (y_n)_n \text{ et } (z_n)_n \text{ sont solutions du problème posé} &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n \text{ et } X_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = A^{n-1}X_1, \quad X_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} \text{ et } X_1 = AX_0\end{aligned}$$

On détermine les puissances de $A = PDP^{-1}$ avec A et D trouvée à la question précédente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \times 3^n & 0 & 0 \\ 3^n + (-1)^{n+1} & (-1)^n + 3^n & (-1)^n - 3^n \\ 3^n + (-1)^{n+1} & (-1)^n - 3^n & (-1)^n + 3^n \end{pmatrix}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = \begin{pmatrix} 2 \times 3^{n-1} \\ 3^n \\ -2 \times 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

Pour avoir X_0, on utilise l'inversibilité de A en écrivant $X_0 = A^{-1}X_1$.

Correction de l'exercice 3

1. Les endo u et $P(u)$ commutent. Par conséquent si $P(u)(x) = 0$ alors $P(u)(u(x)) = u(P(u))(x) = 0$.
2. On a $E = \ker(Q(u)) \oplus \ker(R(u))$. On a aussi $\mathrm{Im}(Q(u)) \subseteq \ker(R(u))$. Ensuite avec le théorème du rang, on compare les dimensions des différents espaces et on montre que $\mathrm{Im}(Q(u))$ et $\ker(R(u))$ ont la même dimension.
3. (a) Supposons par l'absurde que u appartienne à Γ. On a π_u qui divise P donc $\pi_u = P$ ou bien $\pi_u = (X-1)(X-2)$ car le spectre de u étant de cardinal 2, il doit contenir les valeurs 1 et 2. De plus, $\chi_u = \chi_A = (X-1)(X-2)^2$ donc $\pi_u = (X-1)(X-2)$ car il doit diviser χ_u. Mais alors u et A sont diagonalisables ce qui est absurde car on voit que $\dim(E_2(A)) = 1$ alors que 2 est de multiplicité algébrique 2.

   (b) Notons C l'ensemble des couples que l'on cherche.

   Notons $Q = (X-1)(X-2)$ et $R = (X-1)^2(X-2)$. Notons $A_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. Notons $u_1,\ u_2,\ u_3$ les endomorphismes de E ayant les matrices $A_1,\ A_2,\ A_3$ dans une certaine base. On voit rapidement que ces u_i sont bien dans Γ ce qui montre que les couples (Q,P), (Q,R) et (P,P) sont dans C.

Réciproquement, si $u \in \Gamma$ alors $\pi_u \in \{Q,\ P\}$. De plus si $\pi_u = (X-1)(X-2)$ alors χ_u sera égal à R ou P. D'autre part si $\pi_u = P$ alors χ_u sera aussi P car π_u divise χ_u et est de même degré.

Finalement les couples recherchés sont (Q,P), $(Q,R))$ et (P,P).

Correction de l'exercice 4

1. En effectuant $C_4 \leftarrow C_4 - 2C_3$ puis en développant selon C_3, on trouve

$$\det(C(0,0,1,2)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} == +1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -15$$

(en effectuant $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3$) et développant par rapport à C_3). Comme $\det(C(0,0,1,2)) \neq 0$, la matrice $C(0,0,1,2)$ est inversible.

2. (a) Par définition du déterminant,

$$P = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} c_{\sigma(i),i}.$$

(b) Comme pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]$, $c_{i,j} = X$ si $i = j$ et $c_{i,j} \in \mathbb{R}_0[X]$ si $i \neq j$, on en déduit que $P \in \mathbb{R}[X]$ et que le degré de P est inférieur ou égal à n. Notons $Q_\sigma = \prod_{i=1}^{n} c_{\sigma(i),i}$. Si $\sigma \neq \mathrm{Id}$, il existe deux indices $i \neq j$ pour lesquels $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(j) \neq j$, donc Q_σ est de degré inférieur à $n-2$. Si $\sigma = \mathrm{Id}$, alors

$$Q_\sigma = \prod_{i=1}^{n} c_{i,i} = \prod_{i=1}^{n} X = X^n.$$

Ainsi, P est de degré exactement n et de coefficient dominant 1.

3. (a) $\omega_k^n = e^{2ik\pi} = 1$.

(b) Dans le déterminant $P(x_k)$, si l'on effectue l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \omega_k^j C_{j+1}$, la première colonne devient nulle, donc le déterminant $P(c_k)$ de la matrice obtenue est aussi nul. Ainsi, c_k est racine de P.

4. Comme P est unitaire, de degré n, et possède les n racines dictinctes $c_0, \dots, c_{n-1}$, on en déduit que $P = \prod_{k=0}^{n-1}(X - c_k)$ ce qui entraîne

$$\det(C(a_0,\dots,a_{n-1})) = P(a_0) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \omega_k^j \right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_k^j \right).$$