Feuille d'exercices d'Algèbre n^o 4. Groupes P2 et P3.
NOMBRES COMPLEXES

1 Encore des applications

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2-1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 2. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \bigcap \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $f \circ f = id$.

Exercice 3. Soit $z = x + iy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $e^z = e^x e^{iy}$.

1. Déterminer le module et l'argument de $e^z, e^{\bar{z}}, e^{-z}, (e^z)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$.
2. L'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z$, est-elle injective ? surjective ? Changer les ensembles de départ et d'arrivée afin que la restriction de exp devienne bijective.

2 Forme algébrique, forme trigonométrique

Exercice 4. Calculer le module et l'argument de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$. Reécrire sous forme trigonométrique $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$.

Exercice 5. On note $z_1 = \dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1+i$. On définit $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Ecrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
2. En déduire des expressions de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une forme trigonométrique de $(1+i)^n$. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Exercice 7. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si z est réel.

Exercice 8. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq -1$. Démontrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel, et préciser son module.

Exercice 9. Linéariser $\cos^5(x)$ et $\cos^2(x)\sin^3(x)$.

Exercice 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ ainsi que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$.

3 Equations, Racines carrées

Exercice 11. Résoudre en $z \in \mathbb{C}$ l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Exercice 12. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants : $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 8 - 6i$.

Exercice 13. Déterminer les racines carrées de $Z = \sqrt{3} + i$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 14. Résoudre les équations du second degré suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1}.\ z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0 & \mathbf{2}.\ iz^2 + (4i-3)z + i - 5 = 0 \\ \mathbf{3}.\ z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0. & \end{array}$$

Exercice 15. On considère l'équation en $z \in \mathbb{C}$ suivante : $z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = 0$.

1. Déterminer une racine réelle z_0 de cette équation.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, factoriser $z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i$ par $(z - z_0)$.
3. Résoudre l'équation.

Exercice 16. Résoudre en $z \in \mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{llll} a.\ z^3 = -8i, & b.\ z^5 - z = 0, & c.\ 27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0, \\ d.\ z^2\overline{z}^7 = 1, & e.\ z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0. & \end{array}$$

Exercice 17. Résoudre l'équation $z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et en déduire des expressions de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 18. Soit $w \in \mathbb{C}$ une racine n-ième de 1. Montrer que $1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0$.

Exercice 19. Soient $a = \cos(\frac{2\pi}{5})$, $b = \cos(\frac{4\pi}{5})$, $s = a + b$ et $p = a \cdot b$.
En utilisant la formule d'Euler et l'exercice précédent, calculer s et p. En déduire les valeurs de a et b.

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Soit w une racine n-ième de 1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1 + w^k)^n$.
2. Calculer le produit et la somme des racines n-ièmes de 1.