
Feuille d'exercices n° 3

RELATIONS

<u>Exercice 1.</u> Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$. On considère la relation $\mathcal{R}$ dont la graphe est :

$$G = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}.$$

Cette relation est-elle réflexive ? symétrique ? antisymétrique ? transitive ?

<u>Exercice 2.</u> Soit E, l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2. On considère la relation $\mathcal{R}$ entre deux éléments de E définie par :

$$p \,\mathcal{R}\, q \Leftrightarrow \frac{p+q}{2} \in E.$$

Est-ce une relation d'équivalence ?

<u>Exercice 3.</u> Soit p, un entier ; on définit dans $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x - y \text{ multiple de } p.$$

Vérifier que c'est une relation d'équivalence. Préciser la classe d'équivalence de 0. Combien y a-t-il de classes d'équivalence ?

<u>Exercice 4.</u> Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ en posant pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow xe^y = ye^x.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence. Quelle est la classe d'équivalence de 0 ? En général, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, combien y a-t-il d'éléments dans la classe de x ?

<u>Exercice 5.</u> Dans $\mathbb{C}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ en posant pour $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$:

$$z_1 \,\mathcal{R}\, z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|.$$

Montrer que c'est une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence ?

<u>Exercice 6.</u> Soit E une ensemble et A une partie de E. On définit dans $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ en posant pour tout couple $(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$:

$$X \,\mathcal{R}\, Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A.$$

- Montrer que c'est une relation d'équivalence.
- On note $\dot{X}$ la classe d'équivalence de X ; expliciter $\dot{\emptyset}$, $\dot{E}$, $\dot{A}$, $\dot{A}^c$.
- Montrer que $A \cap X$ est l'unique élément de $\dot{X}$ contenu dans A.
- On définit l'application $f : \dot{X} \to A \cap X$ de $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ (ensemble de classes) dans $\mathcal{P}(A)$; montrer que f est bijective.

Exercice 7. Dans $\mathbb{C}$, on définit la relation $\prec$ de la façon suivante : si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ sont 2 complexes,

$$z_1 \prec z_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 < x_2 \\ \text{ou} \\ x_1 = x_2 \text{ et } y_1 \leq y_2 \end{array} \right.$$

Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$, compatible avec l'addition.

Exercice 8. Dans $\mathbb{N}$, on définit la relation $\prec$ par :

$$n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N},\ n \prec m \Leftrightarrow n \text{ divise } m.$$

Vérifier qu'il s'agit d'une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$; est-il total ? Quel est le plus petit et le plus grand élément ?

Exercice 9. Un ensemble est dit "bien ordonnée" si toute partie non vide admet un plus petit élément.
– Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.
– Montrer que "bien ordonné" implique totalement ordonné, mais que la réciproque est fausse.

Exercice 10. Soit E un ensemble ordonné par la relation $\leq$. On définit sur $\mathcal{P}(E)\backslash\{0\}$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow (X = Y \text{ ou } \forall x \in X, \forall y \in Y, x \leq y)\,.$$

Vérifier que c'est une relation d'ordre.