Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2019-2020

Math IV - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices n° 5

ANGLES ET ESPACES EUCLIDIENS ORIENTÉS

Exercice 1. (Rappel cours). Soit P un plan euclidien orienté. Donner des bijections entre les objets suivants : ensemble des angles orientés, $SO(P)$, ensemble des vecteurs unitaires de P, $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Sont-elles des isomorphismes de groupes ?

Exercice 2. Angle plat, angle droit. On considère E un plan euclidien orienté.

1. Soit u un vecteur non nul de E. Montrer que les angles orientés $\widehat{(u,u)}$ et $\widehat{(u,-u)}$ ne dépendent pas de u. On appelle $\widehat{(u,-u)}$ l'angle plat.
2. On cherche les angles α non nuls dont le double est l'angle nul $\widehat{(u,u)}$. Soit α avec cette propriété et $\varphi = \mathrm{rot}(\alpha)$. Montrer que $\varphi^2 = \mathrm{Id}$ et donner la matrice de φ dans une base orthonormée.
3. En déduire que α est l'angle plat. Quelle est sa mesure principale ?
4. On s'interesse maintenant aux angles d'ordre 4, c'est à dire 4β est l'angle nul et $k\beta$ non nul pour $k = 0, 1, 2, 3$. Soit β un tel angle et $\phi = \mathrm{rot}(\beta)$. Montrer que $2\phi = -\mathrm{Id}$.
5. Donner les matrices possibles pour ϕ dans une base orthonormée de E. Quelles sont les mesures principales pour les angles trouvés ?

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2 et u et v deux vecteurs non nuls de E.

1. Notons θ la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(u,v)}$. Montrer que $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|\cos(\theta)$ et $\det(u,v) = \|u\|\|v\|\sin(\theta)$ (où le déterminant est pris dans une base orthonormée directe).
2. Soit f un endomorphisme orthogonal de E.
   (a) On suppose que f est direct. Montrer que $(\widehat{f(u), f(v)}) = \widehat{(u,v)}$.
   (b) On suppose que f est indirect. Montrer que $(\widehat{f(u), f(v)}) = -\widehat{(u,v)}$.
   (c) Application : Soit (ABC) un triangle isocèle en A (*i.e.* tel que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$).
   Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$.

Exercice 4. Produit vectoriel : propriétés de base. Soient E un espace euclidien de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une base de E. Pour $x, y, z \in E$ on note $\det_{\mathcal{B}}(x, y, z)$ le determinant de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées respectives de x, y et z dans la base $\mathcal{B}$.

1. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = \det_{\mathcal{B}'}(x, y, z)$. On note $[x, y, z] := \det_{\mathcal{B}}(x, y, z)$ et on l'appelle le produit mixte de x, y et z.
2. Soient $x, y \in E$. En considérant l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(z) = [x, y, z]$ montrer qu'il existe un unique $w \in E$ tel que $\forall z \in E$, $\varphi(z) =< w, z >$. On dit alors que w est le produit vectoriel de x et y et on note $w = x \wedge y$.

3. Montrer que l'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire antisymmétrique.
4. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $u \wedge v = 0$ si et seulement si u et v colinéaires.
   (b) Si u et v non colinéaires $(u, v, u \wedge v)$ est une base de E.
   (c) $\forall u, v \in E$, $< u, u \wedge v >=< v, u \wedge v >= 0$.

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}^3$ orienté par la base canonique usuelle.

1. On considère un parallélogramme engendré par deux vecteurs (non nuls) u et v. Exprimer la valeur absolue de l'aire du parallélogramme en fonction du produit vectoriel de u et v.
2. On considère $(OABC)$ un trièdre rectangle, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ soient orthogonaux deux à deux. Montrer que le carré de l'aire du triangle (ABC) est égal à la somme des carrés des aires des trois autres triangles (OAB), (OBC) et (OCA).

Exercice 6. Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

1. Déterminer l'expression dans la base $\mathcal{B}$ du produit vectoriel de deux vecteurs u et v de E en fonction de leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$.
2. Soient u, v deux vecteurs normés orthogonaux de E et $w \in E$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base orthonormée de E si et seulement si $w = \pm u \wedge = v$. À quelle condition cette base est-elle directe ?
3. Application : Déterminer toutes les matrices de $O_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$.
4. Démontrer la formule du double produit vectoriel :

$$\forall (u, v, w) \in E, \quad u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w.$$

5. Soient $a, b, c \in E$ non nuls. On note $a' = b \wedge c$, $b' = c \wedge a$, $c' = a \wedge b$ et $v = \|a\|a' + \|b\|b' + \|c\|c'$. On suppose que $v \neq 0$. Montrer que :

$$\cos \widehat{(v, a)} = \cos \widehat{(v, b)} = \cos \widehat{(v, c)}.$$

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté.

1. Soient w un vecteur unitaire de E et $\theta \in \mathbb{R}$. On considère la rotation r d'angle θ autour de l'axe D dirigé et orienté par le vecteur w.
   (a) Soit $x \in E$ un vecteur orthogonal à w. Montrer que $r(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)w \wedge x$.
   (b) On suppose désormais que x est un vecteur unitaire orthogonal à w. Montrer que
   $$\cos(\theta) = \langle x, r(x)\rangle \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = [x, r(x), w] = [w, x, r(x)]$$
   où $[a, b, c]$ désigne le produit mixte des vecteurs $a, b, c \in E$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé et orienté par le vecteur $w = (1, 1, 0)$.
3. Déterminer la nature de l'endomorphisme f de E dont la matrice dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E est
   $$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$
   Préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 8. Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et f un endomorphisme de E. Le but de l'exercice est de démontrer l'équivalence suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \iff f \text{ est une rotation ou } f = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

1. Supposons que f est une rotation.
   (a) Montrer que pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $[f(x), f(y), f(z)] = [x, y, z]$ (où [ ] désigne le produit mixte).
   (b) Pour $(x, y, z) \in E^3$, simplifier $\langle f(x \wedge y) - f(x) \wedge f(y), z\rangle$.
   (c) Conclure.
2. Supposons désormais que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et vérifie : $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.
   (a) Montrer que f est injective.
   (b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E. Montrer que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une base orthonormée directe de E.
   (c) Conclure.
3. Deuxième méthode pour le sens direct : supposons que $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.
   (a) Simplifier $\langle f(x) \wedge f(y), f(z)\rangle$ pour $(x, y, z) \in E^3$.
   (b) Montrer que pour tout $w \in E$, il existe $x, y \in E$ tels que $w = x \wedge y$.
   (c) En déduire que $f^\star \circ f = \det(f)\mathrm{Id}$.
   (d) Démontrer qu'alors $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ou f est une rotation.