Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016
Cursus préparatoire, semestre 2 : algèbre

Feuille 9 : Inverses et déterminants.

Exercice 9.1($*$)
Calculer (s'il existe) l'inverse des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} (\alpha \in \mathbf{C}) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9.2
Pour quelles valeurs du paramètre m les vecteurs $(1, 1, 1)$, $(2, m, 3)$, $(4, m^2, 9)$ forment-ils une base de $\mathbf{R}^3$?

Exercice 9.3($*$)
Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9.4
Factoriser les déterminants suivants ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 1 \\ 1 & b & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}.$$

Exercice 9.5
Soit a, b, c, d quatre réels. Calculer de deux façons $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}$ (on montre ainsi l'*identité de Lagrange*).

Exercice 9.6
Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{C}^3$. On note comme d'habitude $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$, et on considère les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit AB, puis $\det(AB)$ en fonction de $\det(B)$, et en déduire $\det(A)$.

Exercice 9.7(∗)
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit aussi f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} .$$

1. Pour quels réels λ la matrice $A - \lambda I_3$ est-elle inversible ? (indication : calculer $\det(A - \lambda I_3)$.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer une telle base.

Exercice 9.8
Soit A une matrice $n \times n$, antisymétrique (c'est-à-dire que $A^t = -A$). Montrer que si A est inversible alors n est pair.

Exercice 9.9
Soit A une matrice $n \times n$ dont tous les coefficients valent ± 1. Montrer que $\det(A)$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

Exercice 9.10
Soit u l'application de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}_n[X]$ définie par $u(P) = P + P'$. Calculer son déterminant. Même question lorsque $u(P) = XP' + P(1)$.

Exercice 9.11
Calculer les déterminants de taille n suivants, en fonctions des paramètres réels $a, b, a_1, \dots, a_n$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 9.12(∗)
On se propose de calculer le déterminant suivant, dit de Vandermonde :

$$D_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Pour cela, on fixe $(x_1, \dots, x_{n-1})$ et on pose $P(x) = D(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$. Calculer $P(x)$ dans le cas où deux des x_i sont égaux. Dans le cas contraire, montrer que P est un polynôme de degré $n-1$ qui s'annule en $x_1, \dots, x_{n-1}$; en s'intéressant au coefficient dominant de P, donner une formule pour $D_n(x_1, \dots, x_n)$ en fonction de $D_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$. Conclure.

Exercice 9.13 Etant donnés un entier $n \geq 1$ et n réels $x_1, \dots, x_n$, calculer le déterminant suivant :

$$E_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$$

(On pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent)