Applications linéaires. Noyau, image, théorème du rang.

Exercice 7.1($*$)
Soit $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorphisme défini pour tout (a, b, c) dans $\mathbf{R}^3$ par

$$u(a, b, c) = (-b + 2c, 2a - 3b + 4c, a - b + c),$$

et soit $v = u + \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.
2. Quel est le rang de u ? Déterminer une représentation cartésienne de $\operatorname{Im} u$.
3. Quel est le rang de v ? Quelle est la dimension de $\operatorname{Ker} v$?
4. Montrer que pout tout $x \in \operatorname{Ker} v$, on a $u(x) = -x$. En déduire que $\operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Im} u$, puis que $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u$.
5. Montrer que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0\}$.
6. Montrer que pour tout $x \in \operatorname{Ker} u$, on a $u^3(x) = u(x)$, et que pour tout $x \in \operatorname{Ker} v$, on a $u^3(x) = u(x)$.
7. Montrer que $u^3 = u$.

Exercice 7.2
Soit f l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-x + 2y + z, y + 3z, 2x - 2y + 4z)$.

1. Donner une base de l'image et une base du noyau de f. Décrire l'image de f par un système d'équations linéaires.
2. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ d'équation $x = y$. Quelle est la dimension de E ? Donner une base de $f(E)$ et une base de $f^{-1}(E)$.

Exercice 7.3
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application linéaire.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
3. Dire si $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans $E = \mathbf{R}^3$ dans les deux cas suivants : $f(x, y, z) = (x - 2y + z, x - z, z - 2y + z)$; $f(x, y, z) = (2(x + y + z), 0, x + y + z)$.

Exercice 7.4($*$)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Montrer les inclusions $\mathrm{Im}(f \circ f) \subset \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f \circ f)$.
2. Montrer les équivalences $\mathrm{Im}(f \circ f) = \mathrm{Im}(f) \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f \circ f) \iff E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 7.5($*$)
Soit $u : \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}_4[X]$ définie par $u(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$. Montrer que u est une application linéaire. Est-elle surjective ? injective ? Donner une base de $\operatorname{Im} u$.

Exercice 7.6
Soit $u : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ définie par $u(P) = (1 - X^2)P' + 2XP$.

1. Vérifier que u est bien à valeurs dans $\mathbf{R}_2[X]$.
2. Montrer que u est une application linéaire. Est-elle injective ? surjective ?
3. Soit $P_1(X) = (X + 1)^2, P_2(X) = X^2 - 1$ et $P_3(X) = (X - 1)^2$. Vérifier que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbf{R}_2[X]$. Exprimer $u(P_1), u(P_2)$ et $u(P_3)$ comme combinaisons linéaires de P_1, P_2 et P_3.

Exercice 7.7
Pour un entier n, soit $F = \{P \in \mathbf{R}_n[X] \ : \ P'(0) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Déterminer la dimension de F, et donner une base de F.
3. Expliciter un supplémentaire de F.

Exercice 7.8(∗)
On définit $F = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \ : \ \int_0^2 P(t)dt = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$, et déterminer une base de F.

Exercice 7.9(∗)
Soit $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts et $\varphi\colon \mathbf{R}_{2n+1}[X] \to \mathbf{R}^{2n+2}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(a_0), P'(a_0), \ldots, P(a_n), P'(a_n)) \ .$$

1. Montrer que φ est injective.
2. Montrer que pour tout $(x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^{2n+2}$, il existe un polynôme P tel que $P(a_i) = x_i$ et $P'(a_i) = y_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Exercice 7.10
On note E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe C^∞. On définit ϕ et ψ, deux endomorphismes de E par les formules suivantes, pour $f \in E$

$$\phi(f) = f' \text{ et } \psi(f) = \left[x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right]$$

1. Exprimer $\phi \circ \psi$ et $\psi \circ \phi$.
2. Déterminer si ϕ et ψ sont injectives et/ou surjectives.

Exercice 7.11
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{id} = 0$.

1. Montrer que f est inversible, et exprimer son inverse en fonction de f.
2. Établir que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.

Exercice 7.12
Soit E un espace vectoriel de dimension n et ϕ une application linéaire de E dans lui-même telle que $\phi^n = 0$ et $\phi^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $\phi^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $\{x, \phi(x), \phi^2(x), \ldots, \phi^{n-1}(x)\}$ est une base de E.

Exercice 7.13(∗)
Soit E un espace vectoriel ; on note i_E l'identité sur E. Un endomorphisme u de E est un **projecteur** si $u \circ u = u$.

1. Montrer que si u est un projecteur alors $i_E - u$ est un projecteur. Vérifier aussi que $\mathrm{Im}u = \{x \in E;\ \ u(x) = x\}$ et que $E = \mathrm{Ker}u \oplus \mathrm{Im}u$.
2. Un endomorphisme u de E est appelé **involutif** si $u \circ u = i_E$. Montrer que si u est involutif alors u est bijectif et $E = \mathrm{Im}(i_E + u) \oplus \mathrm{Im}(i_E - u)$.
   Soit $E = F \oplus G$ et soit $x \in E$ qui s'écrit donc de façon unique $x = f + g$, $f \in F$, $g \in$G. Soit $u : E \ni x \mapsto f - g \in E$.
3. Montrer que u est un endomorphisme involutif, $F = \{x \in E;\ u(x) = x\}$ et $G = \{x \in E;\ u(x) = -x\}$.
4. Montrer que si u est un projecteur, $2u - i_E$ est involutif et que tout endomorphisme involutif peut se mettre sous cette forme.

Exercice 7.14
Soit p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q + q \circ p = 0$. Montrer qu'alors on a $\mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}p \oplus \mathrm{Im}q$ et $\mathrm{Ker}(p + q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.