**Révisions sur les polynômes ; fractions rationnelles.**

**Exercice 3.1**
Déterminer le PGCD unitaire de $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et de $X^4 - 1$, considérés comme éléments de $\mathbf{Q}[X]$.

**Exercice 3.2**
Déterminer tous les polynômes de degré 3, divisibles par $X - 1$, et tels que les restes des divisions euclidiennes par $X - 2$, par $X - 3$ et par $X - 4$ soient égaux (mais certainement non nuls).

**Exercice 3.3**
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et considérons le polynôme à coefficients réels $P(X) = aX^{n+1} + bX^n + c$. Peut-on choisir $a, b, c$ pour que $P$ admette 1 comme racine multiple ? Quel est alors l'ordre de cette racine ?

**Exercice 3.4**
Factoriser $X^6 + X^3 + 1$ sous forme d'un produit de polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$.

**Exercice 3.5**
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda, \mu$ pour que $X^2 + 1$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

**Exercice 3.6**
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que les polynômes $1 + X + \ldots + \dfrac{X^n}{n!}$ et $1 + X + X^n$ n'ont que des racines simples dans $\mathbf{C}$.

**Exercice 3.7**
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Factoriser le polynôme $1 - X + \dfrac{X(X-1)}{2} + \ldots + (-1)^n \dfrac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$.

**Exercice 3.8**
Dans cet exercice, on cherche à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$. Soit $P$ un tel polynôme.

1. On définit une suite $(u_n)$ par $u_0 = 0$, et $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $P(u_n) = u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. En déduire la valeur de $P$.

**Exercice 3.9**
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ le polynôme $(X + 1)^n - (X - 1)^n$.

**Exercice 3.10**

1. Soient $p_1, p_2, p_3$ et $p_4$ quatre entiers. Trouver deux entiers $q_1$ et $q_2$ tels que $(p_1^2+p_2^2)(p_3^2+p_4^2) = q_1^2+q_2^2$.
   **Indication** : *manipuler les nombres complexes $p_1 + ip_2$ et $p_3 + ip_4$.*
2. Soient $P_1, P_2, P_3$ et $P_4$ quatre polynômes de $\mathbf{R}[X]$. En s'inspirant de la question précédente, trouver deux polynômes réels $Q_1, Q_2$ tels que $(P_1^2 + P_2^2)(P_3^2 + P_4^2) = Q_1^2 + Q_2^2$.
3. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
   (a) Pour tout réel $x$, on a $P(x) \geqslant 0$.
   (b) Il existe $Q_1, Q_2$ dans $\mathbf{R}[X]$ tels que $P = Q_1^2 + Q_2^2$.

**Exercice 3.11** $(*)$
Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbf{R}[X]$ :

$$A(X) = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} \qquad B(X) = \frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} \qquad C(X) = \frac{1}{X(X-1)^2}$$

$$D(X) = \frac{4}{(X^2-1)^2} \qquad E(X) = \frac{X^4-5X^3+10X^2-8X-1}{(X-1)^3(X-2)} \qquad F(X) = \frac{1}{X^n(X-1)}$$

$$G(X) = \frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)^2} \qquad H(X) = \frac{16807}{(X-1)^5(X^2+2X+4)} \qquad I(X) = \frac{1}{X^4-1}$$

$$J(X) = \frac{X}{X^4+1} \qquad K(X) = \frac{X^3}{(X+1)^2(X-1)^2} \qquad L(X) = \frac{(X^2-X+1)^2}{X^2(X-1)^2}$$

**Exercice 3.12**
Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbf{C}[X]$ :

$$A(X) = \frac{1}{X^2+X+1} \quad B(X) = \frac{X}{(X-1)(X^2+1)^2} \quad C(X) = \frac{1}{(X+1)(X^3+1)} \quad D(X) = \frac{P(X)}{X^n-1},$$

où $P \in \mathbf{C}[X]$ est un polynôme vérifiant $\deg P < n$.

**Exercice 3.13** $(*)$
Décomposer $\dfrac{1}{X^{2n}+1}$ en éléments simples sur $\mathbf{C}$ puis sur $\mathbf{R}$.

**Exercice 3.14** $(*)$

1. En décomposant en élements simples la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{X(X+1)}$, calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$
2. Calculer selon le même modèle les sommes suivantes
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1+k^2+k^4} \qquad \sum_{k=3}^{n} \frac{2k-1}{k(k^2-4)}\ .$$

**Exercice 3.15**
On note $F(X) = \dfrac{1}{X(X^2+1)}$. Calculer la dérivée d'ordre 28 de $F$.

**Exercice 3.16**
Soient $a$ et $b$ deux réels distincts et $F(X) = \dfrac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. En utilisant la formule de Taylor en $a$ pour $f(X) = (X-a)^n F(X)$, décomposer $F$ en éléments simples sur $\mathbf{R}$.

**Exercice 3.17**

1. Soit $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle irréductible de $\mathbf{C}(X)$. Montrer que si $a$ est un pôle simple de $F$, alors la partie polaire associée à $a$ est $\dfrac{P(a)}{Q'(a)(X-a)}$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{C}$ la fraction rationnelle $\dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$.