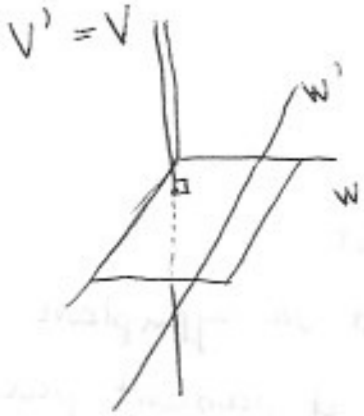

W plan

W' droite sur W

Alors on a bien V' et W' orthogonales

mais $V' \cap W' = \emptyset$.

Projection orthogonale

4.1.3
4.1.4 V ss esp aff de E, $m \in E$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) a est le projeté orthogonal de m sur V

ii) $\forall b \in V$, $\langle \vec{ab}, \vec{am} \rangle = 0$

iii) $\forall b \in V$ $ma \leq mb$

iv) $\forall b \in V - \{a\}$ on a $ma < mb$.

preuve : i) ⇒ ii) Si W est le sous-espace affine de dimension $\dim E - \dim V$ passant par m et perpendiculaire à V, alors $\vec{ab} \in \vec{V}$ et $\vec{am} \in \vec{W}$. Comme $\vec{V} \perp \vec{W}$ on a $\langle \vec{ab}, \vec{am} \rangle = 0$.

ii) ⇒ iii) Soit $b \in V$. $\vec{mb} = \vec{ma} + \vec{ab}$ et $\langle \vec{ma}, \vec{ab} \rangle = 0$

donc $mb^2 = \|\vec{mb}\|^2 = \|ma\|^2 + \|ab\|^2 = ma^2 + ab^2$

d'où $ma \leq mb$.

iii) ⇒ iv) Soit $b \in V \setminus \{a\}$ on sait $ma \leq mb$, supposons $ma = mb$ et soit i le milieu de $[ab]$. Alors (im) est la médiatrice de $[ab]$ et donc $\langle mi, ia \rangle = 0$ et donc $ma^2 = mi^2 + ai^2$ mais $ma^2 \leq mi^2$ donc $ai = 0$ et $a = i = b$ ce qui est absurde.

iv) ⇒ i)

Soit a' la proj orthog de m sur V. Alors $ma^2 = ma'^2 + aa'^2$ donc $ma \geqslant ma'$. et si $a \neq a'$ alors $ma > ma'$, impossible.